

VERGELIJKENDE BESCHOUWINGEN

OVER DE

VOORNAAMSTE INTEGRATIE-METHODEN

VAN DE

DIFFERENTIAAL-VERGELIJKINGEN MET TWEE VERANDERLIJKEN VAN HOOGERE ORDE.

LEIDEN: BOEKDRUKKERIJ VAN L. VAN NIFTERIK HZ.

VERGELIJKENDE BESCHOUWINGEN

OVER DE

VOORNAAMSTE INTEGRATIE-METHODEN

VAN DE

DIFFERENTIAAL-VERGELIJKINGEN MET TWEE VERANDERLIJKEN VAN HOOGERE ORDE.

ACADEMISCH PROEFSCHRIFT,

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,

AAN DE HOOGESCHOOL TE LEIDEN,

OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

DR. MATTHIAS DE VRIES,

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER WIJSBEGEERTE EN LETTEREN,

Op Zaterdag den 5den Juli 1873, des namiddags te 2 uren,

IN HET OPENBAAR TE VERDEDIGEN

DOOR

ARENT BENTHEM,

GEBOREN TE MARKELO.

LEIDEN,
P. SOMERWIL.
1873.

Lebe für dich selbst nur dadurch und insoweit, als du dabei zugleich für die Deinen und für das grosse Ganze lebst.

KARL HARTMANN.

Aan de nagedachtenis mijner Ouders.

Toen ik zoo gelukkig was wegens een ingezonden antwoord op de in het vorige jaar door de Leidsche Hoogeschool uitgeschreven wiskundige prijsvraag *) de gouden medaille te behalen, besloot ik, daar bijzondere omstandigheden het wenschelijk maakten mijne promotie zooveel mogelijk te bespoedigen, om dat bekroonde antwoord ook als academisch proefschrift te gebruiken. De groote omvang er van maakte echter eene inkrimping en gedeeltelijke omwerking wensche-

*) De uitgeschreven prijsvraag luidde:

„Men vraagt eene vergelijking der voornaamste methoden, in gebruik bij het integreeren van differentiaal-vergelijkingen met twee veranderlijken van hoogere orde; de gevolgtrekkingen moeten met voorbeelden worden gestaafd.”

lijk. Die inkrimping betreft voornamelijk § 13 en § 143—147: de laatsten besloegen meer dan tachtig bladzijden, die eene uitsluitende vergelijking der hoofd-methoden bevatt'en; de uitkomsten dier vergelijking heb ik echter zooveel mogelijk in de afzonderlijke beschouwingen dier methoden opgenomen. De behandeling der aanvullingsmethoden heeft ook eene geheele wijziging ondergaan, doordat daarbij de afzonderlijke vergelijking met de behandeling der methoden is samengesmolten. Voorts heb ik de uitgewerkte voorbeelden, voor zoover de duidelijkheid dit toeliet, weggelaten. Ik hoop, dat door deze veranderingen de waarde van dit proefschrift niet is verminderd.

Een enkel woord van dank ga nog mijn proefschrift vooraf. Bij de bewerking er van heb ik ondervonden, wat het wil zeggen op eigen

beenen te moeten staan, en daardoor is bij mij het besef van hetgeen ik verschuldigd ben aan hen, die door hunne lessen en hun raad mijne studie geleid en ondersteund hebben, zóó levendig geworden, dat ik behoefte gevoel hun bij deze gelegenheid openlijk mijne dankbaarheid te betuigen.

In de eerste plaats betuig ik U, Hooggeleerde BIERENS DE HAAN, Hooggeachte Promotor, mijnen innigen dank voor al het goede, dat Gij mij hebt bewezen. Met welgevallen denk ik terug aan den tijd, toen ik, nu dertien jaren geleden, onder Uwe leiding werd geplaatst; sedert hebt Gij mij steeds met raad en daad ondersteund; vele kostbare uren hebt Gij aan mijne belangen opgeofferd; Uw voortreffelijk en degelijk onderwijs heeft bij mij de liefde opgewekt voor de

wetenschap, waaraan ik mij inzonderheid in den laatsten tijd heb toegewijd; U ben ik veel, onuitsprekelijk veel verplicht, meer dan ik hier in woorden kan uitdrukken.

Ontvang ook Gij, Hooggeleerde VAN GEER, de verzekering mijner oprechte dankbaarheid, niet alleen voor Uwe uitmuntende lessen, die zooveel tot mijne vorming en ontwikkeling hebben bijgedragen, maar ook voor de menigvuldige blijken van welwillendheid en belangstelling, welke ik van U mocht ondervinden. Steeds zal ik het als een groot voorrecht beschouwen, dat ik tot Uwe leerlingen heb behoord.

Inzonderheid ook aan U, Hooggeleerde RIJKE, gevoel ik mij ten sterkste verplicht, zoowel door het uitstekende onderwijs, dat ik van U heb genoten, als door de vele bewijzen van toegenegenheid, die

ik van U heb ondervonden. Had ik voor mijne studie of in mijne bijzondere omstandigheden Uwen raad of Uwe hulp noodig, ik was zeker die te vinden — moge het blijken, dat Gij geen ondankbare aan U hebt verplicht!

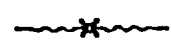
Het onderwijs, dat ik van U ontving, Hooggeleerde H.H. VAN DER BOON MESCH, SURINGAR en SELENKA en de bewijzen van welwillendheid, die ik in en buiten mijne studie van U mocht ontvangen, zullen steeds bij mij in dankbare herinnering blijven.

Hooggeleerde VAN DER SANDE BAKHUIZEN, kon ik ook van Uw onderwijs geen gebruik maken, toch ben ik verzekerd in Uw' geest te spreken, wanneer ik hier een woord van hulde breng aan Uwen grooten voorganger, den Hooggeleerden Heer F. KAISER, en mij,

zoodoende, onder Zijne tallooze vrienden en bewonderaars schaar, nu Hij de betuiging mijner dankbaarheid, helaas, niet meer kan aannemen. In hem verloren de studenten der Leidsche Hoogeschool een onvermoeid en voortreffelijk leermeester, de wetenschap een groot geleerde, de staat een burger, op wien hij terecht trotsch was.

Ten slotte nog een woord van dank aan U allen, die tot mijne vorming hebt bijgedragen en belangstelldet in mijn lot. Met bescheiden vrijmoedigheid blijf ik mij in Uwe vriendschap aanbevelen.

INHOUD.



Bladz.

Inleiding 1

I. De volkomen differentiaal-vergelijkingen en hare integratie 6

II. De onvolkomen differentiaal-vergelijkingen 16

III. De integratie der onvolkomen differentiaal-vergelijkingen 32

A. De hoofdmethoden: 35

a. De scheiding der veranderlijken 37

b. De integreerende factoren 49

c. Het vaststellen van den vorm der bijzondere integraal:

a. De reeksen-vorm 68

b. De gesloten vorm:

α. De Eulersche vormen 87

β. De bepaalde integralen 95

d. De methoden der symbolen 117

e. De differentiatie der differentiaal-vergelijking:

α. Het verhoogen van de orde der vergelijking 134

β. De methode van Liouville 149

INHOUD.

Bladz.
B. De aanvullings-methoden: ... 166
f. De variatie der standvastigen ... 167
g. De methode van d'Alembert ... 189
h. De tweede methode van Lagrange ... 207
i. De methoden van Cauchy ... 209
C. Slotbeschouwing ... 240

INLEIDING.

Het moge geheel overbodig zijn hier uit een te zetten, wat in het volgende geschrift door woorden als eerste, tweede, n^e of algemeene (volledige) integraal, lineaire en niet-lineaire differentiaal-vergelijkingen, enz. bedoeld wordt, wijl hieraan de beteekenis is toegekend, waarin zij steeds worden gebruikt, — niet geheel onnoodig zal het zijn hier met een enkel woord te spreken over de wijze, waarop ik de woorden „integratie van differentiaal-vergelijkingen" heb opgevat, de indeeling, die ik aan deze verhandeling heb gegeven, en de notaties, die ik daarbij heb gebruikt.

Het problema van de integratie van differentiaal-vergelijkingen met twee veranderlijken kan op zeer verschillende wijzen worden opgevat, en naar gelang dier verschillende opvattingen wordt ook dat problema zelf verschillend opgelost. De meest algemeene en meest eenvoudige opvatting is voorzeker die, waarbij men beoogt eene vergelijking te bepalen tusschen de beide veranderlijken, die op de meest algemeene wijze aan de gegeven differentiaal-vergelijking voldoet; of m. a. w. de meest algemeene vergelijking te vinden van de kromme lijnen, die in al hare punten de

eigenschappen bezitten, welke door de differentiaal-vergelijking zijn aangegeven. In dezen zin zijn dan ook de woorden „integreeren van differentiaal-vergelijkingen met twee veranderlijken" hier genomen, zoodat in het volgende alleen de voornaamste dier methoden worden beschouwd, welke tot de bereiking van dàt doel kunnen bijdragen.

Wat de wijze van indeeling betreft: — van het begin af stond het bij mij vast, dat aan de integratie der volkomen differentiaal-vergelijkingen de eerste plaats moest worden ingeruimd; dat hierna van de integratie-methoden der onvolkomen differentiaal-vergelijkingen diegenen moesten worden beschouwd, waardoor werkelijk eene differentiaal-vergelijking kan worden geïntegreerd en die ik den naam van hoofd-methoden heb gegeven; en dat eindelijk de aanvullings-methoden moesten volgen, die slechts dienen om eene verkregen onvolledige integraal te completeeren, of de integraal eener differentiaal-vergelijking uit die eener analoge af te leiden. Over de behandeling en rangschikking der hoofd-methoden kon ik het echter langen tijd met mij zelven niet eens worden: ik had te kiezen tusschen drie verschillende wijzen van behandeling: 1°. òf de tot hiertoe geïntegreerde meer of min algemeene vergelijkingen achtereenvolgens na te gaan en uit die beschouwingen de punten van vergelijking op te maken, — òf de methoden elk afzonderlijk te beschouwen en ze daarbij te rangschikken, 2°. òf naar den vorm der integraal, 3°. òf naar het doel, dat men bij hare toepassing beoogt. Bij de eerste wijze van behandeling zouden methoden op den voorgrond gekomen zijn, waaraan m. i. slechts een verscholen hoekje toekwam, en traden andere, die ik om hare theoretische waarde liever voorop geplaatst zag, geheel op den achtergrond; — ik meende daarom deze wijze te moeten verwerpen. Den vorm der integraal als maatstaf van verdeeling aan te nemen bleek mij onlogisch en zou bovendien niet streng zijn vol te

houden. Mij bleef dus niets over dan de methoden elk afzonderlijk te beschouwen, en ze daarbij in te deelen naar het doel, dat men bij hare toepassing voor oogen heeft.

Bij het kiezen der notaties heb ik getracht aan den daarvoor gestelden viervoudigen eisch te voldoen, namelijk: dat zij eenvoudig zijn, het oog niet vermoeien, beteekenis hebben uit zich zelve en goed worden volgehouden. A_k stelt steeds een bepaald standvastig getal voor; X_k eene functie van x alleen; Y_k eene functie alleen van y, en evenzoo Z_k en U_k alleen van z of u; accenten of tusschen haakjes geplaatste cijfers of letters aan het hoofd eener letter, zien steeds op eene enkele of meermalige differentiatie met betrekking tot x, zoo is bijv. $y' = \frac{dy}{dx}$, $y^{(k)} = d_x{}^k y = \frac{d^k y}{dx^k}$, $C' = \frac{dC}{dx}$, $C^{(k)} = d_x{}^k C = \frac{d^k C}{dx^k}$, $u'' = \frac{d^2 u}{dx^2}$, $Q'(x) = d_x [Q(x)]$, $f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} f(x)$; C_k stelt steeds eene willekeurige standvastige voor, enz. Voorts heb ik aan dezelfde letter door het geheele geschrift zooveel mogelijk dezelfde algemeene beteekenis gehecht; waardoor het echter dikwijls noodzakelijk werd, bij het aanhalen van vergelijkingen uit de werken van meer of min beroemde wiskundigen, andere letters te kiezen dan in de oorspronkelijke verhandelingen voorkomen. Waar ik het noodig of wenschelijk vond, heb ik vermeld, waar de zaak in questie meer uitvoerig behandeld wordt; die vermelding sluit echter geenszins in zich, dat deze behandeling met de gegevene overeenkomt; dikwijls is zulks niet het geval. Daarbij heb ik gebruik gemaakt van de volgende verkortingen:

N. Verh. Kon. Ned. Inst. Nieuwe Verhandelingen van het Koninklijk Nederlandsch Instituut. Eerste Klasse. Deel VI. 1837.

Mém. Acad. Paris. Mémoires de l'Académie des Sciences. Paris.

N. Mém. Acad. Berlin. Nouvelles Mémoires de l'Académie de Berlin.

Misc. Taur. Miscellanea Taurinensia. Tom. III. 1764.

Éc. Polyt. Journal de l'École Polytechnique.

Liouv. Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées.

Crelle. Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik.

Baltzer. Baltzer, R. Theorie und Anwendung der Determinanten. Leipzig, Hirzel. 1864.

Boole. Boole, G. A treatise on Differential Equations. London, Macmillan and Co. 1872.

Cournot. Cournot, A. A. Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal. T. II. Paris, Hachette. 1857.

Duhamel. Duhamel, J. M. C. Cours d'Analyse de l'École Polytechnique. T. II. Paris, Mallet-Bachelier. 1847.

Euler. Euler, L. Institutiones Calculi Integralis. Petropoli. 1792—4.

Frenet. Frenet, F. Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal. Paris, Mallet-Bachelier. 1856.

De Jong. de Jong, J. De integreerende factor en de integreerende vergelijking. Acad. Proefschr. Leiden, Engels. 1871.

Kapteijn. Kapteijn, N. P. Over de rekening met symbolen en de toepassing daarvan op de Integratie van differentiaal-vergelijkingen. Acad. Proefschr. Utrecht, van Loon. 1872.

Mayr. Mayr, A. Der integrirende Factor und die particularen Integrale. Würzburg, Kellner's Buchh. 1868.

Moigno. Moigno, Leçons de Calcul différentiel et de Calcul intégral. T. II. Paris, Bachelier. 1844.

Navier. Navier, L. Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung (herausgegeben von T. Wittstein) II. Bd. Hannover, Hahn'sche Buchh. 1854.

Petzval. Petzval, J. Integration der linearen Differential-Gleichungen. Wien, Carl Gerold's Sohn. 1853—9.

Raabe. Raabe, J. L. Die Differential- und Integralrechnung. III. Bd. Zürich, Orell. 1847.

Riemann. Riemann, Partielle Differential-Gleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. Braunschweig, Vieweg. 1869.

Schlömilch. Schlömilch, O. Compendium der höheren Analysis. II Bd. Braunschweig, Vieweg. 1866.

Spitzer. Spitzer, S. Studien über die Integration linearer Differential-Gleichungen. Wien, Carl Gerold's Sohn. 1860—2.

Sturm. Sturm, Ch. Cours d'Analyse de l'École Polytechnique. T. II. Paris, Gauthier-Villars. 1864.

I.

DE VOLKOMEN DIFFERENTIAAL-VERGELIJKINGEN EN HARE INTEGRATIE.

---

1. **Integreerbaarheid.** Wanneer de differentiaal-vergelijking

$$d^n F = f(x\,y\,y'\,y'' \ldots . y^{(n)}) = 0 \; \ldots \ldots \ldots \quad \text{(I)}$$

ontstaan is uit de differentiatie van de vergelijking

$$d^{n-1} F = f_1(x\,y\,y'\,y'' \ldots . y^{(n-1)}\,C_1) = 0$$

ten opzichte van x, dan zal wel altijd

$$f_1 = \int f dx$$

zijn, maar niet altijd zal men deze integratie kunnen uitvoeren en op deze wijze f_1 uit f kunnen afleiden.

Die onmiddellijke integratie is slechts in één enkel geval mogelijk, namelijk dàn, wanneer $f dx$ de niet-herleide (rechtstreeksche) uitkomst is van de differentiatie van f_1, dat is: wanneer $f dx$ niet slechts de volkomen differentiaal is van f_1 — en er dus geen factor is uitgeworpen — maar zij bovendien den vorm dier volkomen differentiaal heeft behouden — en alzoo niet door transformatie of eliminatie (bijv. van C_1) verandering heeft ondergaan. — Elke differentiaal-vergelijking, die aan deze dubbele voorwaarde voldoet en derhalve onmiddellijk geïntegreerd kan worden, wordt eene volkomen differentiaal-vergelijking genoemd.

2. Hoewel men in ontelbaar vele gevallen onmiddellijk aan de differentiaal-vergelijking kan zien, dat zij geene volkomen differentiaal-vergelijking is, is het niettemin natuurlijk, dat, toen de theorie dier vergelijkingen zich eenigszins begon te ontwikkelen, de wiskundigen een algemeen en afdoend kenmerk trachtten te vinden, waardoor op eene eenvoudige wijze kan worden uitgemaakt of eene differentiaal-vergelijking al of niet tot de volkomene behoort en dus al of niet rechtstreeks integreerbaar is.

Kenmerk van Euler. Euler was de eerste, die in het zoeken naar zulk een kenmerk slaagde en aantoonde, dat de vergelijking

$$f(x\,y\,y'\,y''\ldots\ldots y^{(n)})=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

rechtstreeks geïntegreerd kan worden, wanneer zij voldoet aan de voorwaarde:

$$N-d_x P+d^2_x Q-d^3_x R+\ldots\ldots+(-1)^n d^n_x M=0,\ldots (II)$$

waarin N, P, Q, R,...... M achtereenvolgens de gedeeltelijke differentiaal-quotienten $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''}, \frac{\partial f}{\partial y'''}, \ldots\ldots \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}$ voorstellen [1]).

De wijze, waarop Euler dit algemeene kenmerk van integreerbaarheid afleidde, was alles behalve eenvoudig en natuurlijk; die afleiding onderstelde bovendien de kennis van de gronden der variatie-rekening; het kan ons daarom niet verwonderen, dat ditzelfde kenmerk tot op den laatsten tijd een voorwerp bleef van nauwlettend onderzoek voor vele beroemde wiskundigen [2]). Door al deze onderzoekingen zijn op verschillende, meer of min eenvoudige,

---

[1]) Voor $n=1$ gaat de vergelijking (II) over in $N-d_x P=0$ of $\frac{dP_1}{dy}=\frac{dQ_1}{dx}$ zijnde het gewone kenmerk van N. Bernoulli.

[2]) Onder deze noemen wij: Condorcet, Lexell, Lagrange, Poisson, Cauchy, Joachimsthal, Sarrus, Bertrand, Binet, de Morgan, Mayr

natuurlijke en voldoende wijzen [3]) de beide volgende, reeds door Euler aangetoonde, eigenschappen bewezen:

1°. dat eene differentiaal-vergelijking om rechtstreeks integreerbaar te zijn niet alleen noodzakelijk aan het bovengenoemde kenmerk moet voldoen, maar dat het voldoen aan dit kenmerk daartoe ook genoegzaam is, en

2°. dat, ingeval eene differentiaal-vergelijking aan dat kenmerk voldoet, haar eerste integraal gegeven wordt door de vergelijking

$$d_x^{n-1}F = \int(P - d_x Q + d_x^2 R - \dots)\,\delta y + \int(Q - d_x R + d_x^2 S - \dots)\,\delta dy + \int(R - d_x S + d_x^2 T - \dots)\,\delta d^2 y + \dots = 0, \quad \text{(III)}$$

waarin P, Q, R,.... dezelfde waarde hebben als boven, en de integratie gedeeltelijk ten opzichte van y moet plaats hebben.

Bevatten nu P, Q, R, ... geen y, dat is: heeft men met lineaire differentiaal-vergelijkingen te doen, dan geeft, volgens eene opmerking van Lexell, de gedeeltelijke integratie naar y onmiddellijk

$$d_x^{n-1}F = (P - d_x Q + d_x^2 R - \dots)\,y + (Q - d_x R + d_x^2 S - \dots)\,dy + (R - d_x S + d_x^2 T - \dots)\,d^2 y + \dots = 0 \quad \text{(IV)}$$

waarop nu weder het kenmerk (II) kan worden toegepast. In dit geval kan men dus de 2e, 3e, enz. voorwaardens-vergelijking opmaken en het voldoen aan de eerste k dezer voorwaardens-vergelijkingen stelt ons alsdan in staat om de gegeven lineaire differentiaal-vergelijking k-maal te integreeren of m. a. w. de ke integraal dier vergelijking te bepalen [4]).

---

[3]) Over het meer of min voldoende dier bewijzen zie men Bertrand, Éc. Polyt. T. XVII. Cah. XXVIII. 1841. p. 249; Moigno, p. 550 en vv.; Mayr, § 10.

[4]) Over het volledige theorema van Lexell, dat alleen theoretische waarde heeft, zie men Mayr, § 12.

Zondert men dit laatste zeer bijzondere geval uit, dan kan men niet ontkennen, dat het Eulersche kenmerk omslachtig is in de toepassing: eerst heeft men tal van differentiaties te verrichten om de integreerbaarheid der vergelijking te onderzoeken en leidt dat onderzoek tot eene bevredigende uitkomst, dan worden weder geheel andere bewerkingen vereischt om de integraal te doen kennen, welks bestaan men heeft aangetoond.

3. **Kenmerk van Bertrand.** De ingenieur J. Bertrand is er in geslaagd om deze omslachtigheid geheel te vermijden door het onderzoek naar de integreerbaarheid der gegeven differentiaal-vergelijking te doen samenvallen met de integratie dier vergelijking zelve. Zijne methode (die door Sarrus eenigszins werd gewijzigd en uitgebreid, zie Liouv. T. XIV. 1849. p. 131) komt hierop neer: Is

$$dU = f(x y y' y'' \ldots . y^{(n)}) = 0 \quad \ldots \ldots . \quad \text{(I)}$$

eene volkomen differentiaal-vergelijking en dus $f dx$ de totale, niet-herleide differentiaal van f_1 dan is ook

$$f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \frac{\partial f_1}{\partial y'} y'' + \ldots . + \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)} + \\ + \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} = 0$$

waaruit blijkt, dat *in eene volkomen differentiaal-vergelijking het hoogste differentiaal-quotient slechts in de eerste macht kan voorkomen.* Stelt men nu $y^{(n-1)} = u_1$ dan is $y^{(n)} = \frac{du_1}{dx}$, zoodat men voor de gegeven vergelijking kan schrijven:

$$dU = P_1 + Q_1 \frac{du_1}{dx} = 0$$

waarin P_1 en Q_1 functiën zijn, die alleen x, y, y', y'', $\ldots \ldots y^{(n-2)}$ en u_1 kunnen bevatten.

Integreert men nu $Q_1 du_1$ alsof u_1 de eenige veranderlijke is, dan verkrijgt men een zekeren vorm U_1 en dan

zal, wanneer dU_1 de totale differentiaal van U_1 voorstelt (met terzijdestelling van elke beperking),

$$dU - dU_1 = \Phi_1 (x y y' y'' \ldots\ldots y^{(n-1)}),$$

als het verschil van twee totale differentialen, op nieuw eene volkomen differentiaal moeten zijn, welke $y^{(n)}$ niet meer bevat en waarin $y^{(n-1)}$ slechts in de eerste macht kan voorkomen.

Met dit verschil gaat men nu evenzoo te werk: door weder het op één na hoogste differentiaal-quotient gelijk u_2 te stellen, kan men er namelijk voor schrijven

$$P_2 + Q_2 \frac{du_2}{dx},$$

waarin P_2 en Q_2 alleen x, y, y', y'', ... $y^{(n-3)}$, u_2 bevatten. Zij voorts U_2 de integraal van $Q_2 du_2$ in de onderstelling dat u_2 de eenige veranderlijke is, en zij dU_2 de totale differentiaal van U_2 (zonder eenige beperking), dan is

$$dU - dU_1 - dU_2 = \Phi_2 (x y y' y'' \ldots\ldots y^{(n-2)})$$

weder eene volkomen differentiaal, die geen $y^{(n-1)}$ meer bevat en waarin $y^{(n-2)}$ slechts in de eerste macht voorkomt; enz.

Zoo voortgaande en dus telkens het op één na hoogste differentiaal-quotient als eenige veranderlijke beschouwende, komt men voortdurend tot differentiaal-uitdrukkingen van al lager en lager orde, die integreerbaar zullen zijn als de oorspronkelijke $dU = 0$ zulks is. Eindelijk zal men komen tot de uitdrukking

$$dU - dU_1 - dU_2 - dU_3 - \ldots\ldots - dU_n = 0,$$

welke na integratie geeft

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots + U_n = C_1, \quad \ldots \quad (V)$$

zoodat het voor de integratie van de beschouwde volkomen differentiaal-vergelijking voldoende is om de som der achtereenvolgens bepaalde integralen U_1, U_2, U_3, ... U_n gelijk aan eene willekeurige standvastige te stellen.

4. **Vergelijking der beide kenmerken.** Vergelijkt men de beide beschouwde kenmerken van integreerbaarheid met elkaar, dan valt dadelijk in 't oog, dat het eerste veel eenvoudiger is in uitdrukking dan het laatste, daar het in eene enkele, fraaie, van den vorm der differentiaal-vergelijking onafhankelijke, formule het geheele stelsel voorwaarden bevat, welke in het kenmerk van Bertrand liggen opgesloten, zoodat het geheele onderzoek naar de integreerbaarheid eener vergelijking niets anders vereischt dan eenvoudig de toepassing dier formule.

Die toepassing is echter, zoo als wij reeds opmerkten, veelal zeer omslachtig: want heeft men door tal van differentiaties de integreerbaarheid der vergelijking opgemaakt, dan zijn er nog n integraties noodig om hare eerste integraal te bepalen. Het onderzoek naar de mogelijkheid der integratie en die integratie zelve zijn dus hierbij geheel van elkander gescheiden.

Het kenmerk van Bertrand daarentegen biedt het groote voordeel aan, dat daarbij dat onderzoek met de integratie der vergelijking zelve samenvalt — al integreerende overtuigt men zich van de integreerbaarheid der vergelijking; — en dit voordeel wordt nog verhoogd, doordat elke bewerking een toets aanbiedt, die, wanneer er niet aan wordt voldaan, de niet-integreerbaarheid der vergelijking onmiddellijk verklapt en daardoor de verdere toepassing van het kenmerk overbodig maakt. Men heeft dus hierbij eene reeks van bewerkingen te verrichten, die de integreerbaarheid der vergelijking kunnen doen uitkomen en alsdan terzelfder tijd haar eerste integraal aangeven, doch waarvan dikwijls eene enkele voldoende is om het niet-integreerbaar zijn der vergelijking aan te duiden. Heeft men bijv. de vergelijking

$$dU = xy + 3xy'^2 + 2yy'^3 + (x^2 + 2y^2 y')\, y'' = 0 \quad . \; . \; (1)$$

dan komt hierin y'' slechts in de eerste macht voor, zoodat aan deze voorwaarde voldaan wordt; door nu $y' = u_1$

te stellen en de vergelijking te schrijven in den vorm

$$P_1 + Q_1 \frac{du_1}{dx} = 0$$

wordt $Q_1 du_1 = (x^2 + 2y^2 u_1) du_1$ en dus

$$\int Q_1 du_1 = x^2 u_1 + y^2 u_1^2$$

of

$$U_1 = x^2 y' + y^2 y'^2;$$

bijgevolg is nu de totale differentiaal

$$dU_1 = 2xy' + 2yy'^3 + (x^2 + 2y^2 y') y''$$

en

$$dU - dU_1 = xy - 2xy' + 3xy'^2$$

wat weder een volkomen differentiaal zou moeten zijn. Dit is echter niet mogelijk, daar hierin het hoogste differentiaal-quotient in de tweede macht voorkomt; men kan dus de verdere toepassing van het kenmerk nalaten en nu reeds tot de niet-integreerbaarheid der vergelijking (1) besluiten.

Past men op zulk eene onvolkomen differentiaal-vergelijking het kenmerk van Euler toe, dan verraadt zich het niet-integreerbaar zijn dier vergelijking niet anders dan doordat de formule (II) niet identiek nul wordt; men heeft dus daarbij steeds hetzelfde werk te verrichten alsof men met eene volkomen differentiaal-vergelijking te doen heeft. Nu gebeurt het echter zelden dat de differentiaal-vergelijkingen, wier integreerbaarheid men onderzoekt, rechtstreeks integreerbaar zijn, waaruit volgt, dat de verkortingen van den arbeid, die het kenmerk van Bertrand medebrengt en die een gevolg zijn van de reeks van verificaties, die op elke integratie volgen, als een hoofdvoordeel van dit kenmerk moeten worden in rekening gebracht [5]).

---

[5]) Met het oog hierop zegt Bertrand: „On a ainsi un avantage tout à fait analogue à celui que présente, en algèbre, la méthode des racines com-

5. Men mag echter niet uit het oog verliezen, dat terwijl het Eulersche kenmerk slechts differentiaties vereischt om het al of niet integreerbaar zijn der vergelijking uit te maken, men bij de toepassing van dat van Bertrand voortdurend moet integreeren: en in dit opzicht heeft het eerste voor boven het laatste. Wel is waar zijn in de toepassing die integraties bijna altijd uitvoerbaar en heeft Bertrand aangewezen (Liouv. l. c. p. 126) hoe men ook in het geval, dat zij niet uitvoerbaar zijn, toch tot het al of niet integreerbaar zijn der vergelijking kan besluiten, maar in dit laatste geval wordt de toepassing van het kenmerk veel omslachtiger en zal het Eulersche kenmerk in den regel spoediger tot het doel voeren.

6. Uit het voorgaande blijkt derhalve, dat men in de meeste gevallen aan het kenmerk van Bertrand de voorkeur behoort te geven boven dat van Euler, al is het ook niet in zulk eene fraaie formule vervat, en wel om de volgende redenen:

1°. wijl in het verreweg meest voorkomende geval van niet-integreerbaarheid der vergelijking, de vele verificaties, die het eerstgenoemde kenmerk medebrengt, die niet-integreerbaarheid meestal zeer spoedig doen kennen en alsdan de verdere toepassing er van overbodig maken;

2°. doordat het, indien de vergelijking integreerbaar is, terstond de eerste integraal derzelve oplevert; en

3°. doordien het zich ook in dit geval kenmerkt door eene groote mate van eenvoudigheid, welke des te meer uitkomt, naarmate de beschouwde differentiaal-vergelijking meer samengesteld is en opklimt tot eene hoogere orde.

---

mensurables qui, sans donner une formule pour déterminer ces racines, fait connaître une série d'opérations à l'aide desquelles on peut constater leur existence, et dont une seule suffit souvent pour apprendre qu'il n'en existe pas." (Liouv. l. c. p. 124).

Om van dit laatste een voorbeeld te geven nemen wij de vergelijking

$$dU = \frac{y'''}{\sqrt{(1+y'^2)}} + y''\sqrt{(1+y^2)} - \frac{y'\,y''^2}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} +$$

$$+ \frac{yy'^2}{\sqrt{(1+y^2)}} - 2xy - x^2y' = 0; \qquad \ldots\ldots (2)$$

volgens het kenmerk van Bertrand heeft men nu achtereenvolgens:

$$y'' = u_1, \quad U_1 = \int \frac{du_1}{\sqrt{(1+y'^2)}} = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)}},$$

$$dU_1 = \frac{y'''}{\sqrt{(1+y'^2)}} - \frac{y'\,y''^2}{\sqrt{(1+y'^2)^3}},$$

$$dU - dU_1 = y''\sqrt{(1+y^2)} + \frac{y\,y'^2}{\sqrt{(1+y^2)}} - 2xy - x^2y',$$

$$y' = u_2, \; U_2 = \int du_2 \sqrt{(1+y^2)} = y'\sqrt{(1+y^2)},$$

$$dU_2 = y''\sqrt{(1+y^2)} + \frac{yy'^2}{\sqrt{(1+y^2)}},$$

$$dU - dU_1 - dU_2 = -2xy - x^2y',$$

$$y = u_3, \quad U_3 = \int -x^2\,du_3 = -x^2y,$$

$$dU_3 = -2xy - x^2y',$$

en dus

$$dU - dU_1 - dU_2 - dU_3 = 0;$$

zoodat de vergelijking (2) eene totale differentiaal-vergelijking is. Haar eerste integraal is nu

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = C_1$$

derhalve

$$U = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)}} + y'\sqrt{(1+y^2)} - x^2y = C_1.$$

Dat deze integraal-vergelijking niet op nieuw eene volkomen differentiaal-vergelijking is, blijkt onmiddellijk, wanneer men haar schrijft in den vorm

$$\frac{dy'}{\sqrt{(1+y'^2)}} + dy\sqrt{(1+y^2)} - x^2 y\,dx = C_1 dx.$$

Door op te merken welke samengestelde uitdrukkingen men voor N, P, Q en R zoude verkrijgen, indien men op de vergelijking (2) het kenmerk van Euler wilde toepassen, zal men lichtelijk inzien, dat men daarbij, om enkel de integreerbaarheid der vergelijking op te maken, meer dan het driedubbele werk zou moeten verrichten van hetgeen men boven voor de integratie zelve behoefde [6]).

7. Euler stelde ook nog eene wijziging zijner formule voor [7]), die hierop neerkomt: stelt men $P - \int N dx = p$, $Q - \int p dx = q$, $R - \int q dx = r$, ... dan zal $f(xyy' \ldots\ldots y^{(n)}) = 0$ onmiddellijk integreerbaar zijn, indien de uitdrukkingen Ndx, pdx, qdx, rdx, ... volkomen differentialen zijn, en daar het aantal functiën P, Q, R, ... gelijk is aan de orde der vergelijking, zoo zal alsdan de laatste der daaruit afgeleide functiën p, q, r, ... moeten verdwijnen of eene functie zijn van x alleen.

Deze wijziging heeft echter al de gebreken met de beide beschouwde kenmerken van Bertrand (voortdurende integraties) en Euler (wijdloopigheid) gemeen en wordt om die reden uiterst zelden toegepast; wij hebben er dan ook alleen om der volledigheid wille melding van gemaakt [8]).

---

[6]) Ook bij meerdere veranderlijken is het kenmerk van Bertrand te verkiezen boven dat van Euler; zie hierover: Liouv. l. c. p. 129 en vv.

[7]) Euler, Vol. III. App. de calc. var., Caput III. etc.

[8]) Zie voorts § 45 Noot [21]).

II.

DE ONVOLKOMEN DIFFERENTIAAL-VERGELIJKINGEN.

---

8. **Niet-integreerbaarheid.** Wij hebben boven reeds opgemerkt, dat de differentiaal-vergelijkingen slechts zelden aan de kenmerken van Euler en Bertrand voldoen, zoodat men meestal te doen heeft met vergelijkingen, waarvan het eerste lid geen volkomen differentiaal is en die dus niet rechtstreeks integreerbaar zijn. De integratie van zulke *onvolkomen* differentiaal-vergelijkingen is tot hiertoe in de meeste gevallen met onoverkomelijke bezwaren verbonden, en die bezwaren vermeerderen naarmate de orde der vergelijking stijgt. Zondert men de homogene en de lineaire vergelijkingen uit, dan bezit de theorie dier onvolkomen differentiaal-vergelijkingen geen enkel algemeen practisch door te voeren beginsel, geene enkele *algemeene* integratie-methode, zoodat men bij de oplossing derzelve steeds zijne toevlucht moet nemen tot *bijzondere* methoden, die uit den aard der zaak slechts in een betrekkelijk klein aantal bijzondere gevallen van toepassing zijn. Met de beschouwing van deze bijzondere methoden zullen wij ons in het vervolg bezig houden; vooraf moeten wij echter eenige opmerkingen in het midden brengen aangaande den vorm, dien de integraal der beschouwde differentiaalvergelijking kan aannemen, en aangaande de middelen, die ons ten dienste staan om de integratie eener differentiaal-vergelijking onder gunstige omstandigheden terug te brengen tot die van één of meer vergelijkingen van lagere orde.

9. **Vorm der integraal: gesloten.** De integraal der lineaire differentiaal-vergelijking der eerste orde

$$y' + X_0 y + X = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

is, zooals bekend is:

$$y = e^{-\int X_0 dx}\left(C - \int X dx\, e^{\int X_0 dx}\right)$$

of ook

$$y = -\frac{X}{X_0} + e^{-\int X_0 dx}\left(C + \int d_x \frac{X}{X_0} . dx\, e^{\int X_0 dx}\right).$$

Beide vormen leeren ons welke bewerkingen men met de coëfficienten X_0 en X moet verrichten om de gezochte integraal te verkrijgen, zonder dat men daarbij te letten heeft op den bijzonderen bouw dier coëfficienten. Zulk een algemeene vorm wordt een gesloten integraal genoemd. In verreweg de meeste gevallen zijn de zoo even genoemde bewerkingen slechts uitvoerbaar door middel van oneindige reeksen, maar daar men de oplossing van differentiaal-vergelijkingen als geëindigd beschouwt, wanneer zij tot lagere bewerkingen, bijv. de oplossing van quadraturen, is teruggebracht, verhindert ons dit geenszins de gegeven uitdrukkingen als „geslotene" te beschouwen, die algemeen aangeven aan welke bewerkingen men de coëfficienten X_0 en X moet onderwerpen, wat ook hun vorm moge zijn.

Niet altijd zijn echter de gesloten integralen zoo algemeen als de bovengenoemde; zeer dikwijls ontmoet men gesloten vormen, die een bepaalden vorm van de coëfficienten der differentiaal-vergelijking veronderstellen, zoodat zij bij eene wijziging van deze eene geheele vervorming ondergaan. Zoo is bijv.

$$y = e^{-\int X_1 dx}\left(C_1 - C\int e^{\int X_1 dx} dx\right)$$

de algemeene integraal van de vergelijking

$$y'' + X_1 y' + X_0 y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

maar alleen in de onderstelling dat

$$X_1 = \int X_0 dx$$

is. Bestaat dit verband tusschen X_0 en X_1 niet, dan zal ook de genoemde waarde van y niet meer eene integraal zijn der gegeven vergelijking.

Deze tweede soort van gesloten integralen komen veel meer voor dan de eerste, die uit den aard der zaak zeer zeldzaam zijn. Zoo is zulk een gesloten integraal der eerste soort zelfs niet bekend voor de algemeene herleide lineaire differentiaal-vergelijking der tweede orde

$$y'' + X_1 y' + X_0 y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

en niet ten onrechte (Mayr, Cap. V) vermoedde men reeds sedert lang (Petzval, Bd. I. s. 4), dat een zoodanige gesloten vorm, welke aangeeft, hoe zich in alle mogelijke gevallen de integraal-vergelijking uit de coëfficienten X_0 en X_1 laat samenstellen, volstrekt niet bestaat, omdat deze al de menigvuldige vormen van gesloten integralen van de tweede soort als bijzondere gevallen zou moeten bevatten.

Voor de differentiaal-vergelijkingen van hoogere orde kent men dan ook slechts gesloten integralen van de tweede soort, die dus alleen voor eene bijzondere klasse dier vergelijkingen gelden. Onder deze laatste hebben echter eenige klassen van lineaire vergelijkingen de eigenschap van, in 't algemeen althans, slechts bijzondere integralen toe te laten van denzelfden vorm; en juist die gelijkheid in vorm maakt de opsporing van deze bijzondere integralen gemakkelijk.

10. De eenvoudigste gesloten integralen zijn die, welke slechts geheele stelkundige functiën en rationeele breuken bevatten en deze zijn ook de eenige wier getallen-waarde steeds zonder de hulp van (oneindige) reeksen kan worden bepaald. Daarop volgen (klaarblijkelijk in de onderstelling dat in de vormen slechts eindige functiën voorkomen) de logarithmische, exponentieele, goniometrische en cyclometrische functiën, wier berekening door middel van tafels kan geschieden. Vervolgens de bepaalde integralen, wier

berekening thans ook door tafels wordt ondersteund, en uitdrukkingen als $d_x^p(e^{ux}U)\Big]_{u_1}^{u_2}$, waarin p een geheel getal voorstelt en die tot de voorgaande kunnen worden teruggebracht. Voorts onbepaalde integraal-vormen als $\int Xdx$ en $e^{\int Xdx}$ en zelfs $\int^{(p)} Xdx^p$, waarin X eene geheele rationeele functie van x aangeeft, en waarbij de integraal niet zonder de hulp van oneindige reeksen kan worden voorgesteld, en eindelijk de vormen $d_x{}^p X$ voor eene rationeele, irrationeele en complexe waarde van p.

Tot welken dezer vormen de integratie eener differentiaal-vergelijking zal voeren is zelden door algemeen geldige regels aan te geven; zulks hangt niet alleen af van de methode, die men toepast, maar minstens even zooveel van den aard der vergelijking zelve. De lineaire vergelijkingen met standvastige coëfficienten voeren (wanneer y met of zonder de eerste differentiaal-quotienten niet ontbreken) tot zuivere of gemengde exponentieele en goniometrische functiën; de vergelijkingen met coëfficienten van den vorm $A_k(a+bx)^k$ tot algebraïsche, logarithmische en goniometrische; die met coëfficienten van den vorm $a_k + b_k x$ meestal tot exponentieele functiën of tot bepaalde integralen; de overige lineaire vergelijkingen voeren tot allerlei vormen, naar gelang van den bijzonderen vorm der coëfficienten en de methode, die men kan aanwenden.

11. **Vorm: convergente reeks.** De tweede hoofdvorm, waarin de integraal eener differentiaal-vergelijking voorkomt, is die van eene convergeerende reeks, gerangschikt naar de opklimmende machten (of afdalende, zie bijv. § 73 en Spitzer, 1e Forts. § 37) der onafhankelijk veranderlijke. Van dezen vorm wordt echter zoo min mogelijk en wel alleen dàn gebruik gemaakt, wanneer het niet gelukt de integraal der vergelijking in een bruikbaren gesloten vorm te bepalen. Wel is waar kan men uit zulk eene reeks de getalwaarde der functie voor eenige bepaalde waarde der onafhankelijk veranderlijke zoo nauwkeurig

berekenen als men verkiest, maar juist aan die getalwaarde is ons gewoonlijk weinig gelegen, vooral ook wijl hierop de standvastige der integratie veel invloed heeft. De oplossing der vergelijking beoogt meer de afleiding van de eigenschappen der functie uit den analytischen bouw der bijzondere integralen: nu is echter de bovengenoemde vorm van de integraal de algemeene vorm, waarin in den regel elke functie kan gebracht worden; en daardoor is zij tevens de ondoorzichtigste, en dus voor de bepaling van de bijzondere eigenschappen der functie minst geschikte vorm. Dit valt onmiddellijk in het oog, wanneer men bijv. voor *Sin* x in de plaats stelt de reeks

$$x - \frac{x^3}{1^{3/1}} + \frac{x^5}{1^{5/1}} - \frac{x^7}{1^{7/1}} + \ldots\ldots,$$

want periodiciteit, maximum- en minimum-waarden, aangroeien en afnemen, enz. enz., in het algemeen alle analytische eigenschappen, die ons bij het zien van de eenvoudige uitdrukking *Sin* x levendig voor den geest komen, zijn hierbij nu uit het oog verdwenen. Hieruit blijkt duidelijk waarom men aan de integralen in dezen tweeden vorm niet die hooge waarde kan hechten, die men aan de gesloten integralen toekent (Petzval, Bd. I. Vorrede. s. XI).

12. Hoewel de vorm der integraal een grooten invloed uitoefent op de waarde der methode, door welke zij werd verkregen, en de bijzondere integratie-methoden, waarvan wij boven spraken, in het algemeen integralen van den eenen of van den anderen vorm opleveren, — kan toch die vorm niet als grondslag voor de verdeeling dier methoden worden aangenomen, daar eene verdeeling hierop gegrond, niet alleen, zooals uit het bovenstaande reeds blijkt, niet volkomen streng kan worden volgehouden, maar bovendien in alle opzichten onlogisch zou zijn. Wij zullen dan ook later bij de beschouwing dier methoden den vorm der daardoor verkregen integraal in aanmerking nemen, maar bij de verdeeling derzelve uitsluitend het oog

vestigen op het doel, dat men door de toepassing er van tracht te bereiken.

---

13. **Hulp-methoden.** De moeilijkheden, die aan de integratie eener differentiaal-vergelijking zijn verbonden, stijgen in den regel, naarmate de orde dier vergelijking hooger is; en daarom is het van zeer veel belang om bij eene beschouwing van de oplossings-methoden ook die hulp-methoden te vermelden, welke ten deele die bezwaren helpen overwinnen, door de integratie eener differentiaal-vergelijking terug te brengen tot die van één of meer zoodanige vergelijkingen van lagere orde. Daartoe behooren 1°. het aannemen van een differentiaal-quotient als nieuwe afhankelijk veranderlijke, 2°. het verwisselen van rol van de onafhankelijk en de afhankelijk veranderlijke, en 3°. de substitutie eener nieuwe veranderlijke. Ten opzichte van de beide eerste methoden, die alleen dan kunnen worden toegepast, wanneer de differentiaal-vergelijking zich kenmerkt door de afwezigheid van de afhankelijk veranderlijke y, of van de onafhankelijk veranderlijke x, of van beide, met of zonder het eerste en de eerstvolgende differentiaal-quotienten van y ten opzichte van x, — verwijzen wij naar de leerboeken van Moigno, Raabe, Duhamel, Cournot, Sturm, enz. op bladz. 4 vermeld. De derde, de substitutie eener nieuwe veranderlijke speelt in de theorie der differentiaal-vergelijkingen eene hoofdrol. In verschillende gevallen voeren namelijk zulke substituties onmiddellijk tot de integraal der vergelijking en alsdan worden zij als afzonderlijke integratie-methoden aangemerkt (§ 65 en vv.); in andere gevallen dienen zij om de toepassing der oplossings-methoden mogelijk of gemakkelijk te maken, en als zoodanig komen zij dan ook bij elke dier

methoden ter sprake; — eindelijk kunnen zij dienen als middel om de orde der differentiaal-vergelijking te verlagen of m. a. w. om de integratie derzelve terug te brengen tot die van twee of meer andere, die ieder op zich zelve van lagere orde zijn dan de gegevene. Is hierbij de gegevene vergelijking van de n^e orde en wordt de orde der komende vergelijkingen respectievelijk door de getallen p, q, r, ... aangewezen, dan is steeds

$$n = p + q + r + \ldots\ldots$$

De differentiaal-vergelijkingen, wier integratie men aldus door één of meer substituties tot die van andere meer eenvoudige vergelijkingen heeft teruggebracht, kenmerken zich veelal door homogeniteit. Het begrip dier homogeniteit komt echter bij de grootste wiskundigen in zeer verschillende opvatting voor; daarom zullen wij trachten die onderscheidene opvattingen hier te vereenigen en bovendien de zaak zoo algemeen mogelijk voor te stellen.

14. **Homogene differentiaal-vergelijkingen.** Eene differentiaal-vergelijking is homogeen, wanneer zij eene functie voorstelt, die, in de gewone beteekenis van het woord, homogeen is, zoo x als eene functie van den a^{en} en y als eene functie van den b^{en} graad wordt beschouwd, waarbij a en b alle mogelijke rationeele getallen kunnen voorstellen, mits zij niet gelijktijdig nul zijn [9]). Hierbij is nu y' eene functie van den $(b - a)^{en}$, y'' eene van den $(b - 2a)^{en}$ enz. en dus in 't algemeen $y^{(k)}$ eene functie van den $(b - ka)^{en}$ graad.

De vergelijking

---

[9]) Al de overige differentiaal-vergelijkingen worden gezegd niet-homogeen te zijn; zij komen dus overeen met het geval $a = b = 0$. Deze niet-homogene vergelijkingen zijn verreweg het sterkst vertegenwoordigd; over hare oplossing valt echter niets algemeens te zeggen.

$$x^2yy'''(2x - y'^2) + 4y^2(1 - y'y'') + x^3 = 0 \quad . \; . \; . \; (5)$$

is bijv. homogeen, wanneer men y aanmerkt als eene funtie van den derden en x als eene van den tweeden graad; elke term der vergelijking wordt alsdan van den zesden graad.

15. **Onderscheiding in drie soorten.** De integratie dezer homogene vergelijkingen kan steeds door een of meer eenvoudige substituties worden teruggebracht tot die van eene differentiaal-vergelijking, welke ééne orde lager is (en eene der eerste orde); om zulks te doen is het echter wenschelijk drie verschillende gevallen te onderscheiden, die van de waarden van a en b afhangen, namelijk: 1°. $a \gtrless 0$ en $b \gtrless 0$; 2°. $a = 0$ en $b \gtrless 0$; en 3°. $a \gtrless 0$ en $b = 0$.

Is echter eene differentiaal-vergelijking volgens de vermelde opvatting homogeen, dan zal zij homogeen blijven, wanneer men x beschouwt als eene functie van den ma^{en} en y als eene van den mb^{en} graad, waarin m een willekeurig rationeel getal aangeeft; wij doen dus in geen enkel opzicht aan de algemeenheid der beschouwing te kort, wanneer wij in het eerste der zoo even beschouwde gevallen $a = 1$ en $b = p$ nemen, waarbij p elk willekeurig positief of negatief, geheel of gebroken getal kan voorstellen, in het tweede geval $a = 0$ en $b = 1$ en in het derde geval $a = 1$ en $b = 0$.

16. **Verband tusschen de drie gevallen.** Tusschen deze drie gevallen van homogeniteit bestaat een zeer nauw verband: laat men namelijk in het eerste geval p van positief tot negatief overgaan, dan kan die overgang slechts door oneindig groot of door nul geschieden; heeft hij plaats door nul, dan wordt hij door het derde geval aangegeven; geschiedt hij door oneindig groot, dan zullen de getallen $p, p-1, p-2, \ldots\ldots$, die den graad van $y, y', y'', \ldots\ldots$ aangeven, bij toenemende p meer en meer tot de gelijkheid naderen, zoodat alsdan de overgang door het tweede geval

wordt voorgesteld. Het tweede en derde geval zijn dus de grensovergangen van het eerste.

17. **Homogene vergelijkingen der eerste soort:** $a = 1$ en $b = p$, waarbij p elk willekeurig geheel of gebroken getal, grooter of kleiner dan 0, kan voorstellen.

Om de vergelijkingen, die hiertoe behooren, éene orde te verlagen kan men gebruik maken van de substituties

$$x = e^u \quad \text{en} \quad y = e^{pu}t,$$

waardoor men eene vergelijking verkrijgt in u en t, die door de substitutie

$$\frac{dt}{du} = v$$

éene orde verlaagd wordt (Boole, p. 219).

Klaarblijkelijk kan men tot hetzelfde doel geraken door de beide eerstgenoemde substituties te verbinden (Moigno, p. 664; Raabe, s. 188) tot

$$y = x^p t.$$

Hoe nauw deze beide methoden van verlaging van de orde der vergelijking ook verwant mogen zijn, toch verschillen zij hemelsbreed zoowel in den aard der toepassing als in eenvoud en omslachtigheid van bewerking. In een en ander opzicht is de eerste methode ver te verkiezen boven de laatste en dat wel des te meer, naarmate de orde der vergelijking stijgt [10]).

---

[10]) Het bijzondere geval $p = 1$ werd vroeger in de taal der oneindig kleinen minder juist aldus uitgedrukt: eene differentiaal-vergelijking is homogeen, wanneer zij homogeen is met betrekking tot

$$x, y, dx, dy, d^2y, d^3y, \ldots.$$

Bij de tweede methode gaat hierbij de substitutie over in

$$y = xt;$$

men zal echter beter doen door van de algemeene substitutie $y = x^p t$ gebruik te maken, om later p zoodanig te bepalen, dat daardoor de resulteerende vergelijking eene eenvoudiger gedaante verkrijgt. Zie hierover Raabe, s. 205.

Zie voorts over de vergelijkingen der tweede orde, die volgens de tweede

18. **Homogene vergelijkingen der tweede soort:** $a = 0$ en $b = 1$ of m. a. w. differentiaal-vergelijkingen, die homogeen zijn met betrekking tot de functie en hare afgeleiden, dat is: met betrekking tot y, y', y'', y''', ... $y^{(n)}$. De substituties

$$y = e^{\int v dx} \text{ [11]) of } y' = yt \text{ [12])}$$

zullen hierbij onmiddellijk tot het doel, de verlaging der orde, voeren.

Tot deze homogene vergelijkingen der tweede soort behoort o. a. de herleide lineaire vergelijking

$$y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots\ldots + X_1 y' + X_0 y = 0; \quad . \; . \; (6)$$

hare resulteerende vergelijking van de $(n-1)^e$ orde is echter niet meer lineair, maar heeft den vorm

$$v^{(n-1)} + \ldots\ldots + (v^n + X_{n-1} v^{n-1} + \ldots + X_1 v + X_0) = 0. \; (6^a)$$

Deze vergelijking is meer samengesteld dan de oorspronkelijke; zij is echter in vele gevallen meer geschikt voor de bepaling der bijzondere integralen dan deze: vindt men bijv. eene waarde $v = m$, die niet van x afhangt en het polynomium

$$v^n + X_{n-1} v^{n-1} + \ldots + X_1 v + X_0$$

---

methode volkomen kunnen worden opgelost: Moigno, p. 661. In de toepassing van de theorie der differentiaal-vergelijkingen komen dikwijls vergelijkingen vóor die s (de lengte van den boog) of een of meer opeenvolgende differentiaal-quotienten van s ten opzichte van x of y bevatten, en daarom is het van gewicht hier op te merken, dat de vergelijkingen, welke homogeen zijn met betrekking tot x, y en s, zooals $y\frac{d^2s}{dy^2} + A\frac{ds}{dy} = 0$ zich onder deze soort laten rangschikken.

[11]) Boole, p. 221.

[12]) Raabe, s. 209. Deze laatste substitutie kan gemakkelijk uit de vroegere $y = x^p t$ voor $p = 1$ worden afgeleid, daar hierbij y en y' in hetzelfde geval verkeeren (van denzelfden graad zijn) als x en y in Noot [10]). Uit $y' = yt$ volgt voorts onmiddellijk $y = e^{\int t dx}$, zoodat de beide bovengenoemde substituties op hetzelfde neerkomen.

identiek nul maakt, dan zal deze waarde $v = m$ eene bijzondere integraal zijn van de vergelijking (6^a) en dus ook

$$y = e^{\int m dx} = e^{mx}$$

eene bijzondere integraal van de oorspronkelijke vergelijking (6). Bij de lineaire vergelijkingen met standvastige coëfficienten wordt aan het genoemde polynomium voldaan door n waarden van v, die geen van allen van x afhangen, zoodat in dit geval de bovengenoemde substituties de algemeene integraal opleveren [13]). (Zie § 85).

19. **Homogene vergelijkingen der derde soort:** $a = 1$ en $b = 0$, waartoe al de differentiaal-vergelijkingen behooren, welke homogeen zijn met betrekking tot

$$x, \frac{1}{y'}, \frac{y'}{y''}, \frac{y''}{y'''}, \ldots\ldots \frac{y^{(n-1)}}{y^{(n)}}.$$

Om deze homogene vergelijkingen der derde soort ééne orde te verlagen, laat men x en y van rol verwisselen, waardoor de vergelijking wordt teruggebracht tot eene homogene vergelijking der tweede soort, die derhalve door eene der substituties

$$x = e^{\int v dy} \text{ of } \frac{dx}{dy} = xt$$

ééne orde verlaagd wordt.

Zoo is bijv. de vergelijking

$$(xy' - 1)\, yy''' + y'y'' + yy'^3 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

in dezen zin homogeen, daar elke term bij de opgegeven onderstelling van den $(-3)^{en}$ graad is; de rolverwisseling levert hierbij de vergelijking

$$y\,(x - x')\,(3x''^2 - x'x''') - x'^2x'' + yx'^3 = 0,$$

waarin y de onafhankelijk en x de afhankelijk verander-

---

13) Over de vergelijkingen der tweede orde, waarbij deze substituties tot de volledige integraal voeren, zie men: Moigno, p. 666.

lijke is en x' voor $\frac{dx}{dy}$, x'' voor $\frac{d^2x}{dy^2}$ en x''' voor $\frac{d^3x}{dy^3}$ staat.

Daar nu deze vergelijking klaarblijkelijk homogeen is met betrekking tot x, x', x'' en x''', zal de substitutie $x = e^{\int v dy}$ haar ééne orde verlagen. Zij geeft terstond [14])

$$y\left[v\frac{d^2v}{dy^2} - 3\left(\frac{dv}{dy}\right)^2 - 3v^2\frac{dv}{dy} - 2v^4\right](v-1) - v^2\left(\frac{dv}{dy} + v^2\right) + \\ + yv^3 = 0,$$

zijnde eene vergelijking van de tweede orde in y en v. Is nu hieruit v als eene functie van y bepaald, dan vindt men x door eene quadratuur uit $x = e^{\int v dy}$.

Tot deze laatste soort van homogene vergelijkingen behooren o. a. de vergelijkingen van den vorm

$$x^n y^{(n)} + Y_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + Y_{n-2}x^{n-2}y^{(n-2)} + \ldots\ldots + \\ + Y_1 xy' + Y_0 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

welke dus steeds ééne orde kunnen verlaagd worden. Bij deze vergelijkingen is de komende vergelijking meestal ingewikkelder dan de oorspronkelijke; toch kan zij somtijds dienen om gemakkelijk de bijzondere integralen der vergelijking op te sporen. Zoo geeft bijv. de vergelijking der tweede orde

$$x^2y'' + Y_1 xy' + Y_0 = 0 \ldots\ldots\ldots (9)$$

---

[14]) Men kan beide bewerkingen gemakkelijk samennemen door de formulen voor de rolverwisseling (zie Bierens de Haan, Overzicht der Diff.-rek. § 85. 1°.) te verbinden met die, welke uit $x = e^{\int v dy}$ voortspruiten: $x = 1$, $x' = v$, $x'' = v^2 + \frac{dv}{dy}$, $x''' = v^3 + 3v\frac{dv}{dy} + \frac{d^2v}{dy^2}$, ... waardoor men verkrijgt: $x = 1$, $y' = \frac{1}{v}$, $y'' = -\frac{1}{v^3}\left(v^2 + \frac{dv}{dy}\right)$, $y''' = \frac{1}{v^5}\left[2v^4 + 3v^2\frac{dv}{dy} + 3\left(\frac{dv}{dy}\right)^2 - v\frac{d^2v}{dy^2}\right]$, ... De substitutie dezer waarden zal onmiddellijk de orde der vergelijking met eene eenheid verlagen. Ook bij de tweede methode kan men de rolverwisseling met de substitutie verbinden tot deze nieuwe: $y' = \frac{u}{x}$, ($y'' = \frac{u_1}{x^2}$, enz.), zie Moigno, p. 664. Exemple 1°. $x^2y'' = ay + bxy'$.

die der eerste orde

$$\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dy}+(1-Y_1-Y_0v)=0 \;\ldots\ldots\; (9^a)$$

Kan men nu eene waarde vinden van $v \lesseqgtr 0$, welke niet van y afhangt en den term tusschen de haakjes gelijk nul maakt, dat is: hangt

$$v=\frac{1-Y_1}{Y_0}$$

niet van y af, dan is die waarde van v eene bijzondere integraal der vergelijking (9^a) en dus ook

$$x=e^{\int v dy}$$

eene bijzondere integraal der gegeven vergelijking (9). In dit geval evenals in de gevallen, dat $Y_0=0$ of $Y_1=1$ is, kunnen de veranderlijken in de vergelijking (9^a) onmiddellijk gescheiden worden. Heeft men bijv. de vergelijking

$$y''+\frac{1+py^2}{x}y'+A_0\frac{y^2}{x^2}=0 \;\ldots\ldots\; (10)$$

dan vindt men

$$v=-\frac{p}{A_0}$$

en dus voor de bijzondere integraal $x=e^{-\frac{p}{A_0}y}$ of

$$y=-\frac{A_0}{p}lx.$$

20. Komt nu in één dezer drie gevallen van homogeniteit de veranderlijke x of y niet voor, dan kan de differentiaal-vergelijking nog ééne orde bovendien verlaagd worden; voor de homogene vergelijkingen der eerste en tweede soort volgt dit uit den aard der zaak, terwijl zulks voor die der derde soort blijkt uit de homogeniteit der vergelijkingen, die men verkrijgt, wanneer men x en y van rol laat verwisselen. Laat bijv.

$$f(y, y', y'', \ldots. y^{(n)})=0 \;\ldots\ldots\; (I^a)$$

geen x bevatten en homogeen zijn, indien y als eene functie

van den 0en graad wordt beschouwd, en schrijft men nu voor

$$y'' = y'\frac{dy'}{dy},\; y''' = y'^2\frac{d^2y'}{dy^2} + y'\left(\frac{dy'}{dy}\right)^2, \ldots\ldots$$

dan zal zulks op de homogeniteit der vergelijking klaarblijkelijk geen invloed hebben, zoodat de differentiaal-vergelijking, die de substitutie oplevert

$$\Phi\left(y,\, y',\, \frac{dy'}{dy},\, \frac{d^2y'}{dy^2}, \ldots\; \frac{d^{n-1}y'}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

nog homogeen zal zijn, indien y als eene functie van den 0en graad wordt aangemerkt; y is nu de onafhankelijk veranderlijke geworden, de verkregen vergelijking valt dus in het tweede geval van homogeniteit en derhalve zal de substitutie van

$$y' = e^{\int v dy}$$

haar tot de $(n—2)$e orde terugbrengen.

Eindelijk merken wij nog op, dat, wanneer bij homogene vergelijkingen van de eerste of tweede soort x en y en de $k-2$ eerstvolgende differentiaal-quotienten niet voorkomen, de differentiaal-vergelijking nog k orden zal kunnen verlaagd worden, zoodat de oplossing van eene zoodanige vergelijking kan worden teruggebracht tot die van eene vergelijking van de $(n-k-1)$e orde en eene van de ke orde.

21. Wij hebben in het voorafgaande de algemeene substituties vermeld, waardoor men de orde eener homogene differentiaal-vergelijking met eene eenheid kan verlagen; niet altijd zal men echter van deze gebruik maken, daar somtijds de volledige integratie der oorspronkelijke vergelijking der ne orde gemakkelijker is uit te voeren dan die der daaruit door substitutie afgeleide der $(n—1)$e orde. De homogene vergelijking der 1e soort

$$yy'' + y'^2 + A = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (11)$$

wordt bijv. het eenvoudigst geïntegreerd, wanneer men haar schrijft in den vorm

$$d_x(yy') + A = 0.$$

Evenzoo wordt de homogene vergelijking der tweede soort

$$yy'' + Ay'^2 + Xyy' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

het gemakkelijkst opgelost door haar te vermenigvuldigen met $\frac{dx}{yy'}$, en haar alsdan te schrijven in den vorm

$$\frac{dy'}{y'} + A\frac{dy}{y} + Xdx = 0;$$

en de vergelijking

$$y'' + (X+1)y' + Xy = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

door de substitutie van $y' + y = u$, enz. Voor meerdere voorbeelden zie men § 37 en vv.

22. **Niet-homogene vergelijkingen.** De orde eener niet-homogene vergelijking kan ook somtijds door eene eenvoudige substitutie met één eenheid verlaagd worden. Uit het wezen dier vergelijkingen volgt echter, dat men daartoe slechts bij uitzondering de tot hiertoe beschouwde substituties kan bezigen; veelmeer beslist hierbij de vorm der vergelijking van welke substitutie men moet gebruik maken.

Stelt men bijv. in de vergelijking (Liouv. T. VII. 1842. p. 134)

$$y'' + Yy'^2 + Xy' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

$y' = ue^{-\int Xdx}$, dan gaat zij over in

$$\frac{du}{dx} + Yu^2 e^{-\int Xdx} = 0,$$

waarvoor men kan schrijven, daar $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}y' = ue^{-\int Xdx}\frac{du}{dy}$ is:

$$\frac{du}{dy} + Yu = 0,$$

zijnde eene herleide lineaire vergelijking der eerste orde.

Evenzoo gaat de vergelijking

$$y'' + Y_1 y'^2 + Y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

door de substitutie van $y'^2 = u$ over in de lineaire vergelijking

$$\frac{du}{dy} + 2Y_1 u + 2Y = 0;$$

terwijl eveneens door de substitutie van $y'^2 + y^2 = u^{-2}$ de vergelijking

$$yy'' + Ay'^2 + (A+1)y^2 + A_1 Y (y'^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 0 \quad . \ (16)$$

wordt teruggebracht tot de lineaire

$$y\frac{du}{dy} - Au - A_1 Y = 0.$$

23. Bovendien gelukt het in sommige gevallen de niet-homogene vergelijking door eene eenvoudige substitutie homogeen te maken zonder hare orde te verlagen; zoo gaat bijv. de vergelijking

$$(a_2 x + b_2 y + c_2)\, y'' + (a_1 + b_1 y')\, y' + a_0 = 0 \quad . \ . \ (17)$$

door de substitutie van $y = \eta + \beta$ over in de homogene

$$(a_2 x + b_2 \eta)\, \eta'' + b_1 \eta'^2 + a_1 \eta' + a_0 = 0,$$

wanneer men β zoodanig kiest, dat aan de vergelijking

$$b_2 \beta + c_2 = 0$$

wordt voldaan.

24. Voor de verlaging van de orde van niet-homogene vergelijkingen zijn niet zulke bepaalde algemeene substituties aan te geven als voor die der homogene; alles hangt hier van den aard der beschouwde vergelijking zelve af. Bovendien kent men voor de opsporing der noodige substitutie geen enkelen algemeenen regel, zoodat men hierbij met recht mag spreken van „artifices de calcul par lesquels on est forcé de suppléer sans cesse à l'imperfection des théories générales (Moigno, p. 648).

III.

DE INTEGRATIE DER ONVOLKOMEN DIFFERENTIAAL-VERGELIJKINGEN.

---

25. Even als men de integratie van gewone differentiaal-vormen laat voorafgaan door de opgave van grondformulen, die door de omgekeerde bewerking: de differentiatie van gewone stelkundige of transcendente vormen zijn opgemaakt, — kan men ook de integratie van de onvolkomen differentiaal-vergelijkingen laten voorafgaan door eene tabel van grond-vergelijkingen, die door constructie uit aangenomen bijzondere integralen zijn afgeleid. Iedere functie, iedere differentiaal-vorm, elke bepaalde integraal, ja elke differentiaal-vergelijking zou daarbij als bijzondere integraal kunnen worden aangenomen en daaruit eene differentiaal-vergelijking worden bepaald, wier coëfficienten van die bijzondere integraal afhangen, zij het ook niet op eene zoo eenvoudige wijze als zulks met de coëfficienten en de wortels eener rationeele stelkundige vergelijking het geval is.

Wanneer men door eene gepaste keuze der bijzondere integralen eene aldus geconstrueerde tabel van grondvergelijkingen geschikt maakte om als grondslag te dienen voor de verdere integratie der onvolkomen differentiaal-vergelijkingen, zouden vele der bezwaren worden weggenomen, welke de studie dier differentiaal-vergelijkingen voor den beginner thans zoo moeilijk maken; om deze reden is het van belang bij deze algemeene beschouwing ook hierop het oog te vestigen.

26. **De constructie van differentiaal-vergelijkingen.** De constructie van differentiaal-vergelijkingen kan volgens

Mayr het eenvoudigst en gemakkelijkst op de volgende wijze geschieden (Mayr, § 47): zij

$$y = X$$

de vastgestelde bijzondere integraal, dan bepale men y', y'', y''', ... $y^{(n)}$ en vermenigvuldige deze met willekeurige coëfficienten, doch zóó dat X een gemeenschappelijke factor wordt van alle of meerdere termen; vervolgens voege men deze gelijke producten door dezelfde teekens $+$ of $-$ samen, waardoor men eene vergelijking verkrijgt, die door haar eerste lid, gelijk nul gesteld, eene differentiaal-vergelijking oplevert, waarvan alsdan het tweede de oplossing of m. a. w. de vergelijkingen aangeeft, die tot hare oplossing voeren. Een enkel voorbeeld moge dit nader ophelderen: is de bijzondere integraal

$$y = (a + bx)^m,$$

dan vindt men voor $n < m$

$$(a + bx)^n y^{(n)} = m^{n|-1} b^n (a + bx)^m,$$

$$A_{n-1} (a + bx)^{n-1} y^{(n-1)} = A_{n-1}\ m^{n-1|-1} b^{n-1} (a + bx)^m,$$

$$A_{n-2} (a + bx)^{n-2} y^{(n-2)} = A_{n-2} m^{n-2|-1} b^{n-2} (a + bx)^m,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_1 (a + bx) y' = A_1 m b (a + bx)^m,$$

$$A_0 y = A_0 (a + bx)^m;$$

en dus:

$$(a+bx)^n y^{(n)} + A_{n-1} (a+bx)^{n-1} y^{(n-1)} + A_{n-2} (a+bx)^{n-2} y^{(n-2)} + \ldots$$
$$\ldots + A_1 (a + bx) y' + A_0 y =$$
$$= [m^{n|-1} b^n + A_{n-1} m^{n-1|-1} b^{n-1} + A_{n-2} m^{n-2|-1} b^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + A_1 mb + A_0] (a + bx)^m. \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (18)$$

Het eerste lid, gelijk nul gesteld, geeft nu de differentiaal-vergelijking, terwijl alsdan het tweede lid de n waarden van m oplevert, voor welke

$$y = (a + bx)^m$$

eene bijzondere integraal is derzelve (§ 115—125).

27. Wij vergenoegen ons hier met dit eenvoudige voorbeeld en verwijzen voor het overige naar Mayr, Cap. VI,

waar tal van lineaire en niet-lineaire differentiaal-vergelijkingen aldus worden geconstrueerd. Bij het op deze wijze construeeren van differentiaal-vergelijkingen wordt bij lineaire vergelijkingen in verreweg de meeste gevallen een genoegzaam aantal voorwaardens-vergelijkingen gevonden om daaruit, evenals in het bovenstaande voorbeeld, al de onafhankelijke bijzondere integralen en dus ook de algemeene integraal der verkregen vergelijking te bepalen, — terwijl in die gevallen, waarbij zulks niet het geval is, die algemeene integraal door de methode van de variatie der standvastigen kan worden aangevuld.

Hoe lager de orde is, waartoe de gevonden vergelijking opklimt, hoe algemeener ook de uitkomst der constructie zal zijn, daar bij het stijgen der orde de coëfficienten der vergelijking in den regel meer en meer tot bepaalde getallen overgaan en dus allengskens de algemeenheid der vergelijking verloren gaat. Zeer ware het te wenschen, dat de aldus geconstrueerde vergelijkingen met hare oplossingen in tafels werden bijeengevoegd, — evenals zulks met de onbepaalde en bepaalde integralen van gewone differentiaal-vormen het geval is — en dat uit die tafels eene tabel werd opgemaakt van de meest algemeene vergelijkingen, die er in voorkomen. Die tabel zou dan als grondslag kunnen dienen voor de verdere theorie van de integratie der lineaire, zoowel als der niet-lineaire differentiaal-vergelijkingen. Niet alleen zou hierdoor de beoefening dier theorie wezenlijk verlicht worden, maar mijns inziens is het een volstrekt vereischte om dien weg in te slaan, wil men ooit tot de volledige kennis van de theorie der differentiaal-vergelijkingen geraken [15]).

---

[15]) Het construeeren van differentiaal-vergelijkingen uit aangenomen algemeene iutegralen heeft geenszins die hooge waarde, welke wij hier aan de constructie dier vergelijkingen uit bijzondere integralen toekennen.

Men zie hierover: Euler, Vol. II. Cap. X en XI; Pétzval, Bd. I. s. 193; Spitzer, 2e Forts. s. 74 en vv. en Baltzer, § 9. 1 en 2.

28. **Hoofd-verdeeling der integratie-methoden.** De eigenlijke integratie-methoden, tot wier beschouwing wij thans zullen overgaan, moeten wij in twee hoofdsoorten onderscheiden:

I. De hoofd-methoden, zijnde die, waardoor men rechtstreeks zonder behulp van eenige andere integratie-methode een of meer bijzondere of ook de algemeene integraal eener differentiaal-vergelijking kan bepalen; en

II. de aanvullings-methoden, welke die integraal leeren vinden uit de bekende integraal eener overeenkomstige differentiaal-vergelijking, of ook dienen om eene gevonden bijzondere integraal te completeeren.

Het zelfstandige karakter, dat de hoofd-methoden kenmerkt, missen de aanvullings-methoden geheel en al, zoodat zij dan ook niet met de eerste kunnen vergeleken worden.

A. De hoofd-methoden.

29. **Verdeeling der hoofd-methoden.** Bij de integratie eener onvolkomen differentiaal-vergelijking stelt men zich steeds een bepaald aan te wijzen doel voor oogen, dat geheel en al het wezen en het karakter bepaalt der methode, die men zal toepassen; van daar dat de natuurlijkste verdeeling der hoofd-methoden die is, welke berust op het doel, dat men door hare toepassing kan bereiken. Bij die verdeeling vervallen de genoemde methoden in vijf soorten, waarvan de beide eerste elk slechts ééne, de overige ieder meer dan eene methode bevatten. Het gemeenschappelijk hoofd-doel, dat men zich in het algemeen bij de integratie eener differentiaal-vergelijking voor oogen stelt, — eene vergelijking te bepalen tusschen de beide veranderlijken, die op de meest algemeene wijze aan de gegeven differentiaal-vergelijking voldoet — tracht men hierbij achtereenvolgens te bereiken door middel van

1°. het terugbrengen van de integratie der vergelijking tot die van gewone differentiaal-uitdrukkingen (scheiding der veranderlijken);

2°. het terugbrengen van de onvolkomen differentiaal-vergelijking tot eene volkomene (integreerenden factor);

3°. de opsporing van de bijzondere integralen der gegeven vergelijking (methoden der reeksen, die van Euler en die der bepaalde integralen);

4°. door de invoering van symbolen de bewerkingen op te sporen, die tot de gezochte integraal moeten leiden (methoden der symbolen); en

5°. door de differentiatie der vergelijking hare integratie tot die eener meer eenvoudige vergelijking terug te brengen (verhooging der orde, methode van Liouville).

30. De methode van de scheiding der veranderlijken en die van den integreerenden factor voeren steeds tot eene gesloten uitdrukking, waarin bepaalde integralen noch symbolen voorkomen, en die als eene volledige integraal, met het vereischte aantal willekeurige standvastigen, – zij het ook in vele gevallen als de eerste, tweede, enz. en alleen in bijzondere gevallen als de n^e of algemeene integraal, – aan de gegevene vergelijking voldoet. Dit is een gevolg van het doel, dat men bij de toepassing dier methoden beoogt: men zoekt daarbij de algemeene integraal, maar slechts trapsgewijze; langzaam maar zeker gaat men daarop af; zoover men komt is men er van overtuigd, dat men op den goeden weg is; van afdwalen kan daarbij geen sprake zijn, evenmin als van het verlies zelfs van eene enkele willekeurige standvastige.

Bij de toepassing van de overige methoden tracht men ook wel de algemeene integraal te vinden, maar òf onmiddellijk en stuksgewijze, om daarna uit die deelen die integraal zoo mogelijk samen te stellen, òf men tracht het vinden dier integraal afhankelijk te maken van het uitvoeren van bepaalde bewerkingen of het oplossen van eene

gemakkelijker te behandelen vergelijking: het aantal verkregen willekeurige standvastigen beslist hierbij alles. Terwijl men door deze laatste methoden bij de gunstigste omstandigheden alleen de algemeene integraal vindt, samengesteld uit hare n bijzondere integralen, leveren de beide eerstgenoemde methoden in geval van eene gunstige analyse niet alleen die algemeene integraal met de daarin opgesloten bijzondere integralen, maar ook al de overige integralen van de eerste tot en met de $(n-1)$e, zoodat men daarbij als het ware ziet hoe de gegevene differentiaal-vergelijking uit de oorspronkelijke (of integraal)-vergelijking kan zijn ontstaan. In den eigenlijken zin kan dan ook bij deze methoden alleen sprake zijn van eene zuivere en volkomene analyse. Bij de overige methoden noemt men echter de analyse volledig, wanneer onder alle omstandigheden de algemeene integraal der differentiaal-vergelijking is gevonden. Men beschouwt dus daarbij de zaak van eene zuiver practische zijde en ziet juist datgene over het hoofd, wat voor den theoreticus het meeste bezwaar in heeft, zooals het vooraf vaststellen van den vorm der bijzondere integraal.

a. DE SCHEIDING DER VERANDERLIJKEN.

31. Het eerste doel „de integratie der differentiaal-vergelijking terug te brengen tot die van gewone differentiaal-vormen" stelt men zich voor bij de toepassing van de methode van de scheiding der veranderlijken. Men tracht dus daarbij de integratie der vergelijking onmiddellijk te verbinden aan die van differentiaal-uitdrukkingen met ééne veranderlijke, dat is: aan de theorie der quadraturen, het eerste deel der integraal-rekening. Het genoemde doel ligt derhalve het eerst voor de hand en is als het ware een onmiddellijk gevolg van de volgorde der behandelde stof. Het verraadt echter juist daardoor

eene zeer bekrompen opvatting: eene functie, die twee veranderlijken en hare differentiaal-quotienten bevat, kan slechts onder de meest gunstige omstandigheden als eene som van functiën van ééne veranderlijke, elk vermenigvuldigd met het eerste differentiaal-quotient dier veranderlijke ten opzichte van x, worden voorgesteld — zoodat het beoogen van dat doel reeds terstond de toepassing der methode beperkt. Om dit duidelijk te doen inzien zullen wij de voornaamste wijzen nagaan, waarop eene zoodanige scheiding der veranderlijken kan worden verkregen, of m. a. w. waardoor de differentiaal-vergelijking kan gebracht worden in den vorm

$$\Sigma f(\phi_k)\, d\phi_k = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(VI)}$$

waarin ϕ_k eene willekeurige functie van x, y, y', y'', ... $y^{(n-1)}$ voorstelt, die echter niet meer het n^e differentiaal-quotient van y kan bevatten.

32. **Onmiddellijke scheiding.** In de eerste plaats kan de differentiaal-vergelijking van dien aard zijn, dat men haar onmiddellijk in den bovengenoemden vorm kan schrijven. Heeft men bijv. de lineaire vergelijking met standvastige coëfficienten, die geen y bevat,

$$y^{(n)} + A_{n-1}\, y^{(n-1)} + A_{n-2}\, y^{(n-2)} + \ldots + A_1 y' + X = 0, \quad . (19)$$

dan kan men deze schrijven in den vorm

$$dy^{(n-1)} + A_{n-1}\, dy^{(n-2)} + A_{n-2}\, dy^{(n-3)} + \ldots + A_1 dy + X dx = 0,$$

waarin de veranderlijken reeds gescheiden zijn, zoodat men terstond kan besluiten tot de eerste integraal

$$y^{(n-1)} + A_{n-1}\, y^{(n-2)} + A_{n-2}\, y^{(n-3)} + \ldots + A_1 y + \int X dx = C_1;$$

welke nu, doordat hierin y wel voorkomt, niet weder op dezelfde wijze kan behandeld worden. Kwam echter in de beschouwde vergelijking (19) y' ook niet voor, dan zou in de eerste integraal de scheiding der veranderlijken op nieuw kunnen plaats hebben, zoodat alsdan de tweede integraal dier vergelijking zou gevonden zijn. In 't algemeen zal men de k^e integraal eener lineaire vergelijking

met standvastige coëfficienten door deze methode kunnen bepalen, wanneer y en de eerste $k-1$ differentiaal-quotienten in dezelve ontbreken. De vergelijking is alsdan

$$y^{(n)} + A_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots + A_k y^{(k)} + X = 0, \;.\;.\; (19^a)$$

en voor hare k integraal vindt men:

$$y^{(n-k)} + A_{n-1}\, y^{(n-k-1)} + \ldots + A_k y + \int^{(k)} X dx^k = \Gamma_k, \ldots (19^b)$$

waarin Γ_k de complementaire functie voorstelt.

Is nu $k = n$, dan kan de beschouwde methode alleen tot de algemeene integraal voeren, maar alsdan wordt de vergelijking eenvoudig deze

$$y^{(n)} + X = 0, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (19^c)$$

welke na n-malige scheiding der veranderlijken geeft:

$$y = -\int_{(n)} X dx^n + \Gamma_n.$$

Is echter $k < n$, dan moet men om de algemeene integraal te verkrijgen de vergelijking (19^b) oplossen door behulp van andere methoden, die eerst later ter sprake komen. Men kan echter ook de orde, waarin de methoden worden toegepast, omkeeren door $y^{(k)} = u$ als nieuwe afhankelijk veranderlijke in te voeren en eerst de vergelijking

$$u^{(n-k)} + A_{n-1}\, u^{(n-k-1)} + \ldots\ldots A_k u + X = 0$$

op te lossen, en daarna, na substitutie van hare algemeene integraal in

$$y^{(k)} = u,$$

op deze laatste vergelijking de scheiding volbrengen. Deze omkeering der volgorde is meestal verkieslijk, èn omdat men anders de toepassing der andere methoden door de complementaire functie lastiger maakt, èn omdat de n^e integraal van Xdx meestal ingewikkelder functie zal zijn dan X zelve. Alleen dan, wanneer $-\int^{(k)} X dx^k + \Gamma_k$ eenvoudiger is dan X, zal men met voordeel de eerst aangewezen volgorde verkiezen. Dit is bijv. het geval met de vergelijking

$$y^{IV} + 2y''' - 3y'' + 1 = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

wanneer men haar schrijft in den vorm:

$$y^{IV} + 2y''' - 3y'' + \frac{Cos\,(Bg\ Sin\ x)}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

waarvan men na tweemalige scheiding der veranderlijken voor tweede integraal vindt:

$$y'' + 2y' - 3y + \tfrac{1}{2}x^2 = C_1 x + C_2,$$

welke laatste vergelijking verder gemakkelijk is te integreeren.

33. De bovengenoemde vergelijking (19) is slechts een bijzonder geval van de meer algemeene

$$\frac{y^{(n)}}{f_1(y^{(n-1)})} + A_{n-1}\frac{y^{(n-1)}}{f_2(y^{(n-2)})} + \ldots\ldots + A_1\frac{y'}{f_{n-1}(y)} + X = 0, \; (21)$$

in welke de veranderlijken ook onmiddellijk kunnen worden gescheiden, daar men haar kan schrijven in den vorm:

$$\frac{dy^{(n-1)}}{f_1(y^{(n-1)})} + A_{n-1}\frac{dy^{(n-2)}}{f_2(y^{(n-2)})} + \ldots\ldots + A_1\frac{dy}{f_{n-1}(y)} + Xdx = 0.$$

Zijn hierin al de A's gelijk nul, dan heeft men de zeer dikwijls, vooral als vergelijking der tweede orde, voorkomende vergelijking

$$\frac{y^{(n)}}{f(y^{(n-1)})} + X = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21^a)$$

die op deze wijze voor eerste integraal zal geven eene vergelijking van den vorm:

$$F_1(y^{(n-1)}) + X_1 = C_1.$$

Kan men nu hieruit $y^{(n-1)}$ oplossen als eene functie van x, bijv. $y^{(n-1)} = X_2$, dan is men tevens in staat de algemeene integraal door deze methode te vinden, terwijl zij van de vergelijking (21) zelden meer dan de eerste integraal leert kennen.

34. Terwijl de vergelijking

$$y^{(n)} = X$$

door de methode van de scheiding der veranderlijken algemeen kan worden geïntegreerd, laat zich de vergelijking

$$y^{(n)} = Y$$

volstrekt niet op deze wijze behandelen; alleen in het bijzondere geval dat $n = 2$ is en men dus heeft:

$$y'' = Y \text{ . . . . } (21^a)$$

kan zij gemakkelijk daartoe worden geschikt gemaakt door de opmerking dat $y'' = \frac{dy'}{dx} = y' \frac{dy'}{dy}$ is, want hierdoor wordt zij teruggebracht tot

$$y' dy' = Y dy,$$

welke voor eerste integraal geeft

$$\tfrac{1}{2} y'^2 = \int Y dy + C_1,$$

eene vergelijking der eerste orde, waarin men de veranderlijken onmiddellijk kan scheiden door er voor te schrijven

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2 \int Y dy + C_1}}.$$

Op dezelfde wijze kunnen ook de meer algemeene vergelijkingen

$$\frac{y''}{f(y')} = Y \text{ . . . . } (22)$$

en

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)}) \text{ . . . . } (23)$$

behandeld worden, daar deze laatste voor $y^{(n-1)} = u$ overgaat in $u'' = f(u)$.

35. **Samenvoeging van termen.** Hiermede hebben wij de voornaamste en meest algemeene gevallen beschouwd, waarin de differentiaal-vergelijking onmiddellijk in den aangewezen vorm (VI) kan geschreven worden. Er zijn echter ook vergelijkingen, die niet tot ééne der genoemde kunnen worden teruggebracht en waarbij hetzelfde kan plaats hebben, wanneer men de termen der vergelijking

tot volkomen differentialen samenneemt. Zoo kan men bijv. voor de vergelijking

$$y'' + \frac{a}{x^2}(y' - y) + X = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

schrijven

$$d_x\left(y' + \frac{ay}{x}\right) + X = 0,$$

waaruit onmiddellijk volgt

$$y' + \frac{ay}{x} + \int X dx = C_1.$$

Het is gemakkelijk in te zien, dat het scheiden der veranderlijken op deze wijze slechts zelden zal kunnen geschieden en dat wel des te minder, naarmate de vergelijking van hooger orde is. Het hangt echter zoo geheel en al af van den aard der vergelijking, dat het niet mogelijk is, daarvoor bepaalde regels vast te stellen; bovendien kan men van verreweg de meeste dier bijzondere vergelijkingen op deze wijze slechts de eerste integraal bepalen.

36. **Vermenigvuldiging met een factor.** Is eene vergelijking niet vatbaar voor eene dadelijke scheiding, dan kan zij op verschillende wijzen daartoe geschikt gemaakt worden. In de eerste plaats geschiedt zulks door vermenigvuldiging met den een of anderen factor. Voor de vergelijking

$$yy'' - y'^2 + y^2 X = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

kan men bijv. schrijven

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} + X = 0,$$

waarin de eerste term gelijk is aan $d_x \frac{y'}{y}$, zoodat men ook heeft

$$d\frac{y'}{y} + X dx = 0,$$

welke onmiddellijk geïntegreerd kan worden.

Eene der meest algemeene vergelijkingen, die zich op deze wijze laten behandelen, is de vergelijking van (§ 22) Liouville [16]):

$$y'' + Yy'^2 + Xy' = 0; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

deze wordt door vermenigvuldiging met $\frac{dx}{y'}$

$$\frac{dy'}{y'} + Ydy + Xdx = 0,$$

wat als eerste integraal geeft:

$$y' = C_1 \, e^{-\int Ydy - Xdx}.$$

Voor deze laatste vergelijking kan men weer schrijven

$$e^{\int Ydy} dy = C_1 \, e^{-\int Xdx} dx,$$

in welke de veranderlijken weder gescheiden zijn, zoodat men voor de tweede of algemeene integraal der beschouwde vergelijking vindt:

$$\int e^{\int Ydy} dy = C_2 + C_1 \int e^{-\int Xdx} dx,$$

37. In de beide voorgaande voorbeelden was het gemakkelijk aan de vergelijking te zien, welke factor de scheiding mogelijk zou maken; dit is echter uiterst zelden het geval, want, behalve dat zulk een scheidings-factor [17]) slechts in zeer enkele gevallen bestaat, is het meestal zeer moeilijk om aan de vergelijking te zien, dat de oplossing op deze wijze kan gelukken; en er bestaat geen enkel middel, nòch om uit te maken of eene scheiding op deze wijze mogelijk is, nòch zelfs om, wanneer die mogelijkheid gebleken is, den daartoe noodigen factor te bepalen. De toepassing der methode bepaalt zich dan ook bijna uit-

[16]) Mainardi, Ann. di matematica pura et applic., da B. Tortolini. Roma. T. I. p. 76.

[17]) Men verwarre dezen scheidings-factor niet met den integreerenden factor. Eene vergelijking behoeft geenszins eene volkomen differentiaal-vergelijking te worden door de vermenigvuldiging met den scheidings-factor, zooals uit de vergelijking (26a) blijkt.

sluitend tot die vergelijkingen, waarin de veranderlijken onmiddellijk kunnen worden gescheiden, of waarbij men uit de vergelijking onmiddellijk kan opmaken welk middel tot die scheiding moet voeren.

In die gevallen loopt de integratie der vergelijking volgens deze methode zeer gemakkelijk af en onderscheidt zich de verkregen oplossing boven die, welke men door de toepassing van andere integratie-methoden verkrijgt, door fraaiheid en kortheid van bewerking en eene groote mate van eenvoudigheid in uitvoering; zooals bijv. blijkt, wanneer men de bovengegeven oplossing van de vergelijking (14) van Liouville vergelijkt met die welke in § 22 en § 160 voorkomen. Nog meer komt dit uit, wanneer men de integratie van de vergelijking

$$y'' + \frac{2}{x} y' + Ay = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

volgens Frenet (Exerc. 376), — die voor haar achtereenvolgens schrijft:

$$xy'' + 2y' + Axy = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26^a)$$
$$(xy'' + y') + y' + Axy = 0,$$
$$d_x (xy') + y' + Axy = 0,$$
$$d_x (xy' + y) + Axy = 0,$$

en $$d_x^2 (xy) + Axy = 0,$$

en haar zoo doende tot de vergelijking (22a) terugbrengt, — vergelijkt met de oplossing van diezelfde vergelijking door de methode van de onbepaalde coëfficienten (Duhamel, p. 114), door de reeks van Maclaurin (l. c. p. 116) of ook door de methode der bepaalde integralen (l. c. p. 120). Klaarblijkelijk zal de methode zich in bovengenoemd opzicht des te gunstiger van de overige onderscheiden, naarmate de orde der vergelijking lager is en dus minder achtereenvolgende integraties noodig zijn.

38. **Substitutie van nieuwe veranderlijken.** Eindelijk kan men in enkele gevallen tot de scheiding der veranderlijken

geraken door eene of meer substituties, welke alsdan tevens eene verandering der veranderlijken te weeg brengen. Welke substituties men daartoe moet bezigen, is niet door regels aan te geven; alleen kan men in enkele zeer bijzondere gevallen uit den vorm der vergelijking vermoeden welke substituties waarschijnlijk tot het beoogde doel voeren. Is bijv. gegeven de vergelijking

$$(1 + ax^2)^2 y'' + 2ax (1 + ax^2) y' + Y = 0, \quad . \; . \; (27)$$

dan heeft men reden om te onderstellen, dat de substitutie $Bg\ Tg\ (x\sqrt{a}) = u$ deze vergelijking zal vereenvoudigen. De invoering dezer waarde voert dan ook tot de vergelijking (22[a])

$$\frac{d^2 y}{du^2} + Y = 0.$$

Tot deze zelfde eindvergelijking wordt ook de vergelijking (Boole, p. 226)

$$(1 - x^2) y'' - xy' + Y = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (28)$$

door de substitutie $Bg\ Sin\ x = u$, en de vergelijking

$$(1 + ax^2) y'' + axy' + Y = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (29)$$

door de substitutie $\frac{dx}{\sqrt{1 + ax^2}} = du$ teruggebracht.

39. Somtijds kan men ook door de substitutie van eene functie van x en y beide, met of zonder differentiaal-quotienten, als nieuwe veranderlijke de gezochte scheiding bewerken. Heeft men bijv. de vergelijking

$$y'' = f(ax + by + c); \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (30)$$

dan zal de substitutie $ax + by + c = u$ hier eene scheiding mogelijk maken; immers vindt men $a + by' = u'$ en $by'' = u''$ en dus voor de vergelijking zelve

$$u'' = \frac{1}{b} f(u),$$

welke met (22[a]) overeenkomt en dus de scheiding toelaat.

Hetzelfde doel bereikt men bij de vergelijking [18])

$$y'' + \frac{2}{x} y' + \left(A - \frac{2}{x^2}\right) y = 0 \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

door de substitutie $y' + \frac{2y}{x} = u$, waardoor zij overgaat in

$$u'' + \frac{2}{x} u' + Au = 0,$$

in welke nieuwe vergelijking (zie 26) de veranderlijken kunnen gescheiden worden.

40. Deze laatste handelwijze om de vergelijking geschikt te maken voor de toepassing der beschouwde methode is vooral daarom van beperkte toepassing, omdat, zooals wij boven zeiden, er geene algemeene regels kunnen aangegeven worden om te bepalen, welke substituties tot het verlangde doel voeren. Voor de differentiaal-vergelijkingen van de eerste orde, waar deze methode veel uitgebreider toepassing vindt dan bij die van hooger orde, zijn slechts in eenige bijzondere gevallen zulke regels bekend (bijv. bij de lineaire vergelijkingen), zoodat zelfs bij die vergelijkingen de toepassing dezer methode door de onbekendheid met de substitutie, die men behoeft, zeer beperkt wordt; hoeveel te meer zal men bij die der hoogere orde te vergeefs moeten zoeken naar de verlangde substitutie, zelfs in die gevallen, waarin het bestaan van zulk eene substitutie mocht zijn aangetoond.

---

[18]) Frenet, Exerc. 377. De bekende Riccati'sche vergelijking

$$y'' = A x^n y$$

gaat door de substitutie $x^{\frac{n+2}{2}} = u$ over in

$$\frac{d^2y}{du^2} + \frac{n}{(n+2)u} \frac{dy}{du} - \frac{A}{n+2} y = 0,$$

welke voor $n = -4$ met (26) overeenkomt.

41. Wij hebben hiermede de vier voornaamste wijzen [19]) nagegaan, waarop men tot eene scheiding der veranderlijken kan geraken en het is ons niet gelukt eene enkele algemeene lineaire of niet-lineaire vergelijking door deze methode op te lossen. Alleen van eenige bijzondere vergelijkingen kan men door hare toepassing tot de algemeene integraal geraken; hiertoe behooren echter vergelijkingen als

$$y^{(n)} = \mathrm{X}$$

en

$$y'' = \mathrm{Y},$$

die in zeker opzicht een algemeen karakter dragen en die zeer dikwijls in de toepassing van de theorie der differentiaal-vergelijkingen voorkomen, en zelfs eenige andere niet-lineaire vergelijkingen, waarvan (21a), (22), (23) en (14) de meest algemeene zijn. Bij al deze vergelijkingen is de analyse volkomen en komt de verkregen algemeene integraal voor in een fraaien gesloten vorm. Behalve bij deze en eenige andere vergelijkingen, die in § 37 en vv. vermeld zijn en die tot de vergelijking (22a) kunnen worden teruggebracht, staat de methode in volledigheid van analyse in zoover achter bij andere methoden, dat zij zelden meer dan de eerste of ook k^e ($k < n$) integraal der vergelijking leert kennen. Men kan wel is waar het aantal der door deze methode volledig oplosbare vergelijkingen onbepaald vermeerderen door in de zooeven genoemde vergelijkingen nieuwe substituties in te voeren — zoo gaat bijv. de vergelijking (29) door de substitutie $u = z^{-1}$ over in de bekende vergelijking (Boole, p. 428)

$$x^2 (x^2 + a) y'' + x (2x^2 + a) y' + \mathrm{Y} = 0, \quad . \; . \; . \quad (32)$$

die derhalve ook door de substitutie $\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 + a}} = du$ tot de vergelijking (22a) wordt teruggebracht — maar ook dan

[19]) De overgang van rechthoekige op pool-coördinaten kan somtijds ook tot eene scheiding der veranderlijken voeren.

nog zal de methode in de werkelijke toepassing der differentiaal-vergelijkingen zelden tot de algemeene integraal eener vergelijking kunnen voeren. Mocht het ook menigvuldiger gebeuren, dat de methode eene eerste of k^e integraal leert kennen, zelfs dit geschiedt nog betrekkelijk zelden en dan nog alleen bij zeer bijzondere vergelijkingen. Als algemeene regel geldt hierbij dat de methode des te minder eene goede uitkomst zal opleveren, naarmate de orde der vergelijking stijgt.

42. Algemeener in beginsel en ook algemeener in toepassing is het doel, dat men zich bij de integratie door de methode van den integreerenden factor voor oogen stelt. Dat doel: „het terugbrengen der onvolkomen differentiaal-vergelijkingen tot volkomene" verraadt eene algemeenheid van opvatting, die men te vergeefs bij de overige methoden zoekt, zooals uit het volgende nader zal blijken.

43. Zal eene differentiaal-vergelijking

$$f(xyy'y'' \ldots y^{(n)}) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(I)}$$

den vorm hebben van eene volkomen differentiaal, dan is het, zooals wij bij de behandeling van de criteria van integreerbaarheid reeds opmerkten, noodzakelijk, dat zij het onmiddellijke resultaat zij van de differentiatie der vergelijking, waaruit zij is ontstaan. Maar zelfs wanneer aan deze voorwaarde wordt voldaan, zal toch de beschouwde vergelijking nog niet altijd den vorm hebben van eene totale differentiaal, wijl de differentiatie somtijds een gemeenschappelijken factor in al de termen invoert, welke door het gelijk nul zijn van de differentiaal verdwijnt. Is bijv. de oorspronkelijke vergelijking

$$\frac{y'}{x} = C$$

dan geeft de differentiatie

$$\frac{xy'' - y'}{x^2} = 0,$$

waarvoor men schrijft

$$xy'' - y' = 0;$$

en deze laatste vorm is nu geen totale differentiaal meer.

44. Hoe echter de bovengenoemde differentiaal-vergelijking van de n^e orde er ook moge uitzien en hoe zij ook ontstaan zij, steeds kan zij gebracht worden in den vorm

$$y^{(n)} + f(xy\,y'\,y'' \ldots\ldots y^{(n-1)}) = 0 \ldots\ldots \text{(VII)}$$

Als zij in dien vorm geschreven is, kan men gemakkelijk aantoonen, dat er oneindig veel factòren bestaan van zoodanigen aard, dat de linkerzijde van deze vergelijking door vermenigvuldiging met een dezer factoren, gewoonlijk

b. DE INTEGREERENDE FACTOREN

(door Euler multiplicatoren) genoemd, in een volkomen differentiaal overgaat (Navier, p. 84; Cournot. p. 224; enz.). Daar elke volkomen differentiaal-vergelijking steeds door de methoden van Euler en Bertrand kan geïntegreerd worden, komt het hierbij geheel en al neer op het bepalen van zulk een factor.

45. **Integreerende vergelijking.** De meest algemeene wijze waarop dit kan geschieden is de volgende.

Zij Φ zulk een factor, dan zal de beschouwde vergelijking (I) na vermenigvuldiging met Φ aan het Eulersche kenmerk [20]) moeten voldoen, zoodat Φ moet voldoen aan de voorwaarde

---

[20]) Hoewel wij hier om de meerdere eenvoudigheid in de voorstelling alleen van het kenmerk van Euler gebruik maken, kan men zich ook goed en veelal met voordeel van dat van Bertrand bedienen om de integeerende vergelijking te bepalen, zooals wij door een enkel voorbeeld willen aanwijzen. Nemen wij daartoe de vergelijking (33)

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \left(\frac{2}{x^2} - a^2\right)y = 0,$$

$$d_x^n \Phi = N\phi - d_x(P\phi) + d_x^2(Q\phi) - d_x^3(R\phi) + \ldots = 0, \quad \text{(VIII)}$$

of na ontwikkeling aan

$$d_x^n \Phi = \phi(N - d_x P + d_x^2 Q - \ldots) - d_x\phi(P - 2 d_x Q + 3 d_x^2 R - \ldots) +$$
$$+ d_x^2 \phi(Q - 3 d_x R + 6 d_x^2 S - \ldots) - \ldots = 0; \quad \text{(IX)}$$

welke vergelijking door Mayr (Cap. III; zie § 184) met den naam van integreerende vergelijking werd bestempeld. Elke waarde van ϕ, die aan deze vergelijking voldoet, is nu een integreerende factor van de beschouwde differentiaal-vergelijking; en daar de integreerende vergelijking, zoowel als de gegevene, eene differentiaal-vergelijking is van de n^e orde, geeft zij ons n onderling onafhankelijke waarden van ϕ. Met elke dezer n waarden komt een eerste integraal van de gegeven vergelijking overeen, die ieder ééne willekeurige standvastige bevat, zoodat wij nu in staat zouden zijn om n eerste integralen te bepalen van de $(n-1)^e$ orde. De eliminatie [21]) van de $(n-1)$ differentiaal-quotienten van y uit deze n vergelijkingen zou dan eene vergelijking opleveren in x, y en n willekeurige

---

dan moet

$$dU = \varphi y'' - \frac{2\varphi}{x} y' + \left(\frac{2}{x^2} - a^2\right)\varphi y = 0$$

eene volkomen differentiaal zijn. Wij vinden nu achtereenvolgens (zie § 3):

$$U_1 = \varphi y',$$
$$dU_1 = \varphi y'' + y'\varphi',$$
$$dU - dU_1 = -\left(\frac{2}{x}\varphi + \varphi'\right)y' + \varphi\left(\frac{2}{x^2} - a^2\right)y,$$
$$U_2 = -\left(\frac{2}{x}\varphi + \varphi'\right)y,$$
$$dU_2 = -\left(\frac{2}{x}\varphi + \varphi'\right)y' - \left(\frac{2}{x}\varphi' - \frac{2\varphi}{x^2} + \varphi''\right)y,$$
$$dU - dU_1 - dU_2 = y\left[\varphi'' + \frac{2}{x}\varphi' - a^2\varphi\right] = 0;$$

en dus voor de voorwaarde van integreerbaarheid of voor de integreerende vergelijking

$$\varphi'' + \frac{2}{x}\varphi' - a^2\varphi = 0,$$

even als boven, en $y = 0$ (Zie § 103).

[21]) Voor $n = 2$ het eerst opgemerkt door Fontaine, Traité de calc. diff. et int. Paris, 1770. Introduction.

standvastigen, die dus de algemeene integraal der beschouwde vergelijking moet zijn.

Hebben wij bijv. de vergelijking

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \left(\frac{2}{x^2} - a^2\right) y = 0, \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

welke niet rechtstreeks integreerbaar is, dan geeft ons de toepassing van (IX) voor de integreerende vergelijking onmiddellijk

$$\Phi'' + \frac{2}{x} \Phi' - a^2 \Phi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33^a)$$

Voor deze laatste kunnen wij volgens § 37 schrijven:

$$d_x^2 (\Phi x) - a^2 (\Phi x) = 0;$$

waaruit wij vinden

$$\Phi x = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}.$$

Voor de integreerende factoren heeft men dus

$$\Phi = \frac{1}{x} e^{ax} \qquad \text{en} \qquad \Phi = \frac{1}{x} e^{-ax};$$

door nu de vergelijking achtereenvolgens met deze beide waarden van Φ te vermenigvuldigen verkrijgt men twee volkomen differentiaal-vergelijkingen, die voor eerste integralen geven

$$y' \frac{e^{ax}}{x} - \frac{y}{x^2} (1 + ax) e^{ax} = C_5$$

en

$$y' \frac{e^{-ax}}{x} - \frac{y}{x^2} (1 - ax) e^{-ax} = C_6;$$

en door verder hieruit y' te elimineeren vindt men voor de gezochte algemeene integraal

$$y = x (C_3 e^{ax} + C_4 e^{-ax}).$$

46. Men kan echter de voorgaande handelwijze eenigszins wijzigen door de gegeven vergelijking met eenen der verkregen integreerende factoren te vermenigvuldigen en de daardoor ontstane volkomen differentiaal-vergelijking te

integreeren; de eerste integraal van deze laatste vergelijking met een tweeden integreerenden factor te vermenigvuldigen en daarna op nieuw te integreeren, enz.; de verkregen uitkomst steeds met een anderen integreerenden factor vermenigvuldigende en dan integreerende, tot men ten laatste, na van al die factoren te hebben gebruik gemaakt, de algemeene integraal der vergelijking heeft gevonden. Op deze wijze geschiedt de integratie meer, even als bij de vorige methode, voet voor voet: eerst de eerste integraal, dan de tweede, vervolgens de derde, enz.

Thans zullen wij nagaan in hoever men een dezer wegen kan volgen en welke uitkomsten dit oplevert.

47. In het voorbeeld, dat wij boven behandelden, was de integreerende vergelijking eenvoudiger en gemakkelijker op te lossen dan de gegeven vergelijking; dit is echter in de toepassing zelden het geval; meestal is de integreerende vergelijking ingewikkelder en moeilijker te integreeren dan de oorspronkelijke vergelijking, en zelfs in vele gevallen niet oplosbaar, zooals bij de niet-lineaire vergelijkingen.

Bij deze vergelijkingen zijn namelijk N, P, Q, R, ... niet enkel functiën van x, maar van x en y beide; zoodat alsdan de integreerende vergelijking eene betrekking aangeeft tusschen ϕ en de beide van elkander afhankelijk veranderlijken x en y en hunne differentiaal-quotienten; die integreerende vergelijking kan dus niet worden opgelost, tenzij y als eene functie van x bekend zij, m. a. w. tenzij de beschouwde vergelijking reeds zij opgelost. Zoo geeft bijv. de algemeene differentiaal-vergelijking der eerste orde:

$$P_1 y' + Q_1 = 0, \quad \dots\dots\dots \quad (34)$$

waarin P_1 en Q_1 functiën zijn van x en y, voor de integreerende vergelijking:

$$P_1 \phi' - \phi\left(\frac{\partial Q_1}{\partial y} - \frac{\partial P_1}{\partial x}\right) = 0;$$

en deze kan in het algemeen niet worden opgelost; zij is alleen dàn voor oplossing vatbaar, wanneer

$$\frac{\frac{\partial Q_1}{\partial y} - \frac{\partial P_1}{\partial x}}{P_1}$$

geen y bevat.

48. Veel minder nog kan er sprake zijn om de integreerende vergelijking van de algemeene vergelijking van de tweede of hoogere orde op te lossen, zoodat wij bij deze vergelijkingen den aangewezen weg niet kunnen betreden. Het valt echter onmiddellijk in het oog, dat, wanneer de oorspronkelijke differentiaal-vergelijking lineair is, N, P, Q, R, ... functiën zijn van x alleen, en bovendien dat de integreerende vergelijking, die nu enkel ϕ en x en hunne differentiaal-quotienten bevat, ook lineair zal zijn; zoodat het vermoeden voor de hand ligt, dat men bij de toepassing dezer methode op die lineaire vergelijkingen beter zal slagen. In zoo ver is dit waar, dat men klaarblijkelijk hierbij niet op „onoplosbare" vergelijkingen stuit; maar toch zal in verreweg de meeste voorkomende gevallen de integreerende vergelijking moeilijker te integreeren zijn dan de oorspronkelijke. Een groot voordeel biedt echter hierbij deze methode aan, namelijk dit, dat het niet noodig is de herleide of homogene vergelijking te nemen, maar dat men dadelijk tot de integratie der niet herleide vergelijking kan overgaan. Bij de lineaire vergelijkingen zijn, zooals wij gezien hebben, de integreerende factoren functiën van x alleen, en hierdoor ligt het middel voor de hand, hoe men terstond tot de integraal der niet-herleide vergelijking kan besluiten (Mayr, Cap. IV).

49. Bovendien is die integreerende vergelijking steeds eene herleide vergelijking. Zoo geeft de algemeene lineaire vergelijking van de tweede orde

$$y'' + X_1 y' + X_0 y + X = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

voor integreerende vergelijking:

$$\Phi'' - X_1 \Phi' + \left(X_0 - \frac{dX_1}{dx}\right)\Phi = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (35^a)$$

Stelt men nu hierin

$$\Phi = e^{\int v dx},$$

dan gaat deze vergelijking over in

$$v' - X_1 v + v^2 + \left(X_0 - \frac{dX_1}{dx}\right) = 0,$$

eene niet-lineaire vergelijking van de eerste orde, wier oplossing met meestal onoverkomelijke moeilijkheden gepaard gaat. Is

$$X_0 - \frac{dX_1}{dx} = 0,$$

dan gaat zij over in

$$v' - X_1 v + v^2 = 0,$$

welke als bijzonder geval van de bekende vergelijking van Bernoulli gemakkelijk kan geïntegreerd worden; maar alsdan gaat (35^a) over in

$$\Phi'' - X_1 \Phi' = 0,$$

welker integraal ook langs een meer eenvoudigen weg kan worden bepaald. Is echter

$$X_0 - \frac{dX_1}{dx} \lessgtr 0,$$

dan kan de beschouwde vergelijking niet algemeen worden opgelost, zooals door Mayr (Cap. V) is aangetoond.

50. Uit den aard der zaak is duidelijk, dat men in de integratie van de algemeene lineaire vergelijking van hooger orde nog veel minder zal slagen. De eenige algemeene lineaire vergelijking, waarvan de integratie practisch uitvoerbaar is, is die van de eerste orde

$$y' + X_0 y + X = 0; \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (36)$$

en voor hare integreerende vergelijking vindt men onmiddellijk

$$\Phi' - X_0 \Phi = 0,$$

en dus voor den integreerenden factor

$$\Phi = e^{\int X_0 dx}.$$

51. Door deze beschouwing wordt ons dus de hoop ontnomen om ooit tot de oplossing van de algemeene lineaire vergelijkingen te geraken, en in zoover heeft zij practisch nut; maar de zaak krijgt een geheel ander aanzien, wanneer wij tot bijzondere lineaire vergelijkingen overgaan. Immers bestaat er tusschen de lineaire vergelijking en hare integreerende vergelijking zulk eene innige en volkomen bepaalde afhankelijkheid, dat de mogelijkheid van de integratie van eene dezer beide bijeenbehoorende vergelijkingen die van de andere medebrengt. Nu is de integreerende vergelijking wel van dezelfde orde als de gegevene, maar zij is toch ook lineair; zoodat het kan voorkomen, dat niet de gegevene maar wel de integreerende vergelijking dadelijk geïntegreerd kan worden, en juist in dit geval is de vermelde afhankelijkheid van het meeste gewicht.

Om een enkel voorbeeld hiervan te geven nemen wij de zoogenoemde Spitzersche vergelijking (Mayr, S. 23):

$$(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0 \quad . \; . \; (37)$$

welke door de meest eenvoudige hulpmiddelen kan geïntegreerd worden (§ 90), wanneer de beide vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} &a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0, \ldots\ldots \\ \text{en} \qquad &b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 = 0, \ldots\ldots \end{aligned}\right\} (37^a)$$

minstens één wortel gemeen hebben.

Nu kan het gebeuren, dat deze vergelijkingen niet voor de coëfficienten der oorspronkelijke vergelijking, maar wel voor die van hare integreerende vergelijking aan die voorwaarde voldoen. Voor deze laatste vindt men terstond:

$$(a_2+b_2x)\Phi''+(2b_2-a_1-b_1x)\Phi'+(a_0-b_1+b_0x)\Phi=0, \quad (37^b)$$

en voor deze gaan bovengenoemde vergelijkingen over in

$$\left.\begin{array}{l} a_2\lambda^2+(2b_2-a_1)\lambda+(a_0-b_1)=0\ \ldots \\ b_2\lambda^2-b_1\lambda+b_0=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (37^c)$$

en

Hebben deze laatste vergelijkingen ten minste één gemeenschappelijken wortel, dan zal de vergelijking (37) ook gemakkelijk kunnen worden geïntegreerd, zoodat dit eene tweede voorwaarde is voor de mogelijkheid eener meer eenvoudige integratie der gegeven vergelijking [22]).

Laat bijv. gegeven zijn de vergelijking

$$(2+x)y''+(4+5x)y'+(1+6x)y=X, \ \ldots \ (38)$$

welker coëfficienten niet aan de eerstgestelde voorwaarde voldoen, dan heeft deze tot integreerende vergelijking

$$(2+x)\Phi''-(2+5x)\Phi'-(4-6x)\Phi=0; \ \ldots \ (38^a)$$

en nu hebben

$$2\lambda^2-2\lambda-4=0$$

en

$$\lambda^2-5\lambda+6=0$$

den gemeenschappelijken wortel $\lambda=2$, zoodat

$$y=e^{2x}$$

een bijzondere integraal is van de vergelijking (38^a) en dus ook een integreerende factor van de gegeven vergelijking (38). Na vermenigvuldiging met dien factor en integratie vindt men hieruit voor de eerste integraal dier vergelijking:

$$y'+\frac{3x-1}{x+2}y+\frac{C-\int Xe^{2x}dx}{e^{2x}(x+2)}=0,$$

zijnde naar behooren eene lineaire vergelijking der eerste orde.

---

22) De toepassing van het kenmerk van Euler op de vergelijkingen (37) en (37^b) leert dat zij volkomen differentiaal-vergelijkingen zijn, wanneer $a_0=b_1$ en $b_0=0$ of $a_0=b_0=0$ is.

Houdt men nu in het oog, dat de oplossing der Spitzersche vergelijking in het algemeen met zeer groote bezwaren verbonden is en alleen door gebruik te maken van bepaalde integralen gelukt, dan zal men lichtelijk inzien, dat de boven aangewezen toepassing van de methode van den integreerenden factor op die soort van vergelijkingen van het hoogste belang moet zijn, daar hierdoor het aantal vergelijkingen, wier integratie langs een veel eenvoudigeren weg kan verkregen worden, bijna verdubbeld wordt. Bovendien is het een groot voordeel, dat het hierbij, zooals ook uit het bovenstaande voorbeeld blijkt, geheel onverschillig is of de vergelijking in den herleiden of in den niet-herleiden vorm voorkomt.

52. Behalve deze nieuwe, voor de theorie en de oplossing der lineaire differentiaal-vergelijkingen belangrijke uitkomsten heeft het inslaan van den aangewezen weg ook andere niet minder gewichtige opgeleverd, die bij de beschouwing der methode niet op den achtergrond mogen worden geschoven.

Terwijl men namelijk met bijna alle overige hoofdmethoden niet bij machte is om de algemeene integraal eener lineaire differentiaal-vergelijking te bepalen, zoodra twee of meer harer bijzondere integralen zich in eene enkele schijnen op te lossen; en men om in die gevallen toch die algemeene integraal te kennen meestal tot, streng beschouwd, onhoudbare theoriën zijne toevlucht moet nemen; geeft de methode van den integreerenden factor niet alleen onder alle omstandigheden onmiddellijk de algemeene integraal, maar toont zij ons tevens streng wetenschappelijk aan, dat de uitkomsten dier wankelbare theoriën voor die bijzondere gevallen juist zijn, en dat wel onverschillig of de integreerende vergelijking zelve al [23]) of niet in zulk een bijzonder geval verkeert.

---

[23]) Dit is bij vergelijkingen, wier coëfficienten den vorm Ak of $Ak\ (a + bx)^k$

Zooals wij reeds opmerkten is het voor de toepassing der behandelde methode ook geheel en al onverschillig of men te doen heeft met herleide of met niet-herleide verlijkingen; ook bij deze laatste heeft zij de uitkomsten van andere, minder wetenschappelijke, methoden als juist doen kennen, zoodat wij te harer gunste deze dubbele gevolgtrekking mogen maken:

1°. behoeft zij bij hare toepassing nimmer eenige aanvullings-methode; en

2°. het gebruik dezer aanvullings-methoden is eerst nú geoorloofd, nu door de methode van den integreerenden factor hare uitkomsten als juist zijn erkend.

53. In dubbel opzicht staat dus de methode van den integreerenden factor boven andere hoofd-methoden, doordien zij eene volledige, afgewerkte is, die de hulp van andere methoden kan ontberen, en doordat zij theoretische uitkomsten oplevert, die voor de wetenschap van het hoogste belang zijn.

Vergelijkt men de overige hoofd-methoden met hulpbehoevenden, die den steun van anderen noodig hebben als onmisbaar vereischte voor hun bestaan, dan moet men de methode van den integreerenden factor beschouwen als den rijke, den hulpverleenende, die van zijn overvloed aan anderen iets mededeelt om ook dezen het leven mogelijk te maken. Maar is ook de hulpbehoevende somtijds rijk in zijn armoede, deze methode is in zeker opzicht arm bij al haren rijkdom. Oppervlakkig beschouwd schijnt zij een afgerond geheel uit te maken, waaraan niets ontbreekt; maar, op de keper gezien, vindt men een vlekje, dat de wetenschap tot hiertoe niet geheel heeft kunnen wegnemen en dat de hooge waarde der me-

---

hebben, steeds het geval. Voorbeelden van oplossing vindt men in Mayr, Cap. IV.

De beschouwingen in deze en de volgende paragrafen gelden niet voor de methode van de scheiding der veranderlijken (zie § 46).

thode zeer vermindert. Door de integreerende vergelijking kan de lineaire vergelijking worden geïntegreerd, maar daarvoor is de integratie dier integreerende vergelijking volstrekt noodzakelijk, en hiertoe is de methode van den integreerenden factor zelden bij machte. Zoekt men weder hare integreerende vergelijking, dan komt men op de oorspronkelijke vergelijking terug, zoodat deze handelwijze hier niets kan baten. Die integratie kan niet anders verkregen worden dan door de hoofd-methoden, die wij boven als arm en hulpbehoevend kenmerkten.

54. In een paar bijzondere gevallen helpt echter de methode zich zelf.

Heeft de lineaire vergelijking slechts standvastige coëfficienten, dan hebben hare bijzondere integralen den vorm (de Jong, Hoofdst. II. § 4)

$$y = e^{mx};$$

zijn die coëfficienten afdalende machten van hetzelfde binomium $a + bx$, dan is de vorm dier bijzondere integralen [24])

$$y = (a + bx)^m.$$

Dit zijn uitkomsten door de methode zelve afgeleid. Deze beide meest voorkomende klassen van lineaire vergelijkingen worden dus onder alle omstandigheden door deze methode volledig en streng wetenschappelijk geïntegreerd.

Al de bezwaren, die de toepassing van andere methoden in den weg staan, worden daarbij ongedwongen uit den weg geruimd, geene enkele methode wordt te hulp geroepen, de vorm der bijzondere integraal wordt streng wetenschappelijk bepaald, op bij-omstandigheden, zooals het herleid of niet-herleid zijn der vergelijking wordt geen acht geslagen, de geheele integratie vormt een afgerond geheel, m. a. w. de analyse laat niets te wenschen over:

---

[24]) Bierens de Haan, Versl. en Mededeel. der Kon. Acad. v. Wetensch. Afd. Natuurk. 2e Reeks. Deel IV. 1872.

zij geldt volkomen algemeen en is zuiver wetenschappelijk.

Schooner, zuiverder, vollediger en algemeener analyse dan deze door de methode van den integreerenden factor treft men nergens in de leer van de integratie der differentiaal-vergelijkingen aan. Die analyse moge voor den practicus geene hooge waarde hebben, wijl genoemde vergelijkingen reeds sedert lang door andere empirische methoden volledig waren geïntegreerd (§ 85 en 86), — voor den theoreticus is zij de eerste groote en vaste schrede in het uitgebreid gebied, waarvan hij ook voor de toekomst de beste verwachtingen koestert [25]).

55. Voor de overige algemeene lineaire vergelijkingen met veranderlijke coëfficienten zijn niet zulke volledige analysen bekend, zoodat men bijna elke bijzondere vergelijking afzonderlijk moet integreeren. De toepassing van de methode van den integreerenden factor voert daarbij steeds tot eene analoge integreerende vergelijking, voor

---

[25]) In een enkel geval kan men zich hierbij den arbeid zeer verlichten: kan namelijk de équation caractéristique (de éq. auxiliaire van Cauchy) der lineaire vergelijking met standvastige coëfficienten (waartoe de andere klasse kan worden teruggebracht) en dus ook die harer integreerende vergelijking im m factoren worden ontbonden, dan kan de integratie dier lineaire vergelijking worden teruggebracht tot die van m lineaire vergelijkingen van lagere orde. Heeft men bijv. de vergelijking

$$y^{\mathrm{V}} - 4y^{\mathrm{IV}} + 5y''' - 3y'' + 4y' + y = \mathrm{X},$$

dan is hare integreerende vergelijking

$$\varphi^{\mathrm{V}} + 4\varphi^{\mathrm{IV}} + 5\varphi''' + 3\varphi'' + 4\varphi' - \varphi = 0;$$

en voor de équation caractéristique dezer laatste

$$\mu^5 + 4\mu^4 + 5\mu^3 + 3\mu^2 + 4\mu - 1 = 0;$$

kan men schrijven:

$$(\mu + 1)(\mu^2 + 1)(\mu^2 + 3\mu - 1) = 0;$$

en nu kan de integratie der gegeven vergelijking worden teruggebracht tot die van de vergelijkingen:

$$-\theta' + \theta = \mathrm{X},$$
$$\psi'' + \psi = \theta,$$
$$y'' - 3y' - y = \psi,$$

wat somtijds tot eene meer eenvoudige oplossing voert dan de rechtstreeksche toepassing der methode.

welker oplossing de hulp van andere methoden moet worden ingeroepen. Het is echter meestal eenvoudiger die andere methoden onmiddellijk op de gegeven vergelijking toe te passen, waarbij de methode van den integreerenden factor kan dienen om de bezwaren te helpen overwinnen, die deze toepassing verhinderen (§ 103); of ook om in bijzondere gevallen de integratie gemakkelijk te maken (§ 51). De omstandigheid, dat de algemeene lineaire vergelijking der eerste orde door de methode van den integreerenden factor algemeen kan worden geïntegreerd, is oorzaak, dat deze steeds tot de algemeene integraal eener lineaire vergelijking kan voeren, wanneer $n - 1$ harer bijzondere integralen bekend zijn.

56. Uit het voorgaande blijkt, dat de methode van den integreerenden factor meer en belangrijker resultaten heeft opgeleverd dan alle overige integratie-methoden te zamen. Wel is waar strekken zich de verkregen uitkomsten alleen uit over de lineaire differentiaal-vergelijkingen, maar deze maken het hoofddeel van de differentiaal-vergelijkingen in het algemeen uit, zoodat de theorie derzelve als de grondslag moet worden beschouwd, waarop die der algemeene differentiaal-vergelijkingen berust. De uitkomsten bij de lineaire vergelijkingen verkregen, moeten dan ook de maat aangeven, naar welke de integratie-methoden moeten vergeleken worden, en klaarblijkelijk zal alsdan elke vergelijking ter gunste van de methode van den integreerenden factor uitvallen.

57. In beginsel omvat zij alle lineaire differentiaal-vergelijkingen, wijl men, bij het doel, dat men bij hare toepassing beoogt, acht heeft te slaan, nòch op den vorm, nòch op den aard der vergelijking, die men wil oplossen. Aan de toepassing der overige methoden onttrekken zich steeds tal van vergelijkingen, òf door dat zij zich niet laten gieten in den vorm, die voor de aanwending der methode noodzakelijk is (§ 31), òf doordien de bijzondere integralen

niet kunnen worden uitgedrukt in den vorm, dien men vooraf heeft vastgesteld, òf eindelijk doordat de vergelijking zich niet tot eene eenvoudiger en gemakkelijker te integreeren vergelijking laat terugbrengen: de toepassing van de methode van den integreerenden factor is in beginsel volstrekt algemeen, zoodat alleen technische bezwaren haar kunnen verhinderen.

Geene enkele methode is dan ook op zulke vaste grondslagen opgebouwd als deze: het bestaan der intregeerende vergelijking brengt het bestaan der n integreerende factoren mede, en deze leveren niet alleen de eerste, maar ook de algemeene integraal der beschouwde lineaire vergelijking. Wel is waar moet men, om die n integreerende factoren te bepalen, wederom eene differentiaal-vergelijking van de n^e orde oplossen, die meestal moeilijker te behandelen is dan de oorspronkelijke, zoodat de moeilijkheid daardoor niet slechts verschoven, maar zelfs vermeerderd is; doch die integreerende vergelijking is toch ook in vele gevallen gemakkelijker op te lossen dan de gegevene en leidt behalve tot de zuiver wetenschappelijke integratie van twee voorname klassen van vergelijkingen, tot uitkomsten, welke die van andere methoden bevestigen en tot eigenschappen, die voor de theorie der lineaire vergelijkingen van het hoogste belang zijn.

58. Bovendien kunnen wij door de betrekkingen, die tusschen de bijzondere integralen der oorspronkelijke differentiaal-vergelijking en de overeenkomstige integralen harer integreerende vergelijking bestaan, tot het wezen der differentiaal-vergelijking besluiten. Zoo drukt

$$y_k \, \Phi_k = \textit{standvastige}$$

het karakter uit van de lineaire vergelijkingen met standvastige coëfficienten (Mayr, s. 37) en

$$(a + bx) \, y_k \, \Phi_k = \textit{standvastige}$$

dat van de lineaire vergelijkingen met coëfficienten van den vorm $A_k \, (a + bx)^k$ (Zie Noot 24). Dergelijke betrekkingen

dragen niet alleen bij tot de volledige kennis der differentiaal-vergelijkingen; zij stellen ons tevens in staat uit ééne bijzondere integraal en n integreerende factoren de overige $n-1$ bijzondere integralen te bepalen. Hier komt het voornamelijk uit, hoe nauw de integreerende factoren aan de bijzondere integralen verwant zijn; zij vervangen als het ware deze laatste, vullen ze aan, compenseeren ze: k integreerende factoren en $n-k$ bijzondere integralen bepalen volkomen de algemeene integraal.

59. Eindelijk levert ons de integreerende vergelijking het middel om te bewijzen, dat de algemeene lineaire vergelijking der tweede en hoogere orde niet algemeen kan worden geïntegreerd; en hierdoor bakent zij als het ware der wetenschap haar gebied af en wijst haar het doel aan, dat zij moet trachten te bereiken: „de opsporing der bijzondere integralen eener in toepassing werkelijk gegevene differentiaal-vergelijking"; en voor de beide bovengenoemde klassen van lineaire vergelijkingen heeft zij ons in staat gesteld dat doel langs volkomen streng wetenschappelijken weg te bereiken. Met de toepassing van de methoden, die zich uitsluitend tot de opsporing van zulke bijzondere integralen leenen, en hiertoe behooren de meeste integratie-methoden, jaagt men dus een doel na, dat, aangewezen door de methode van den integreerenden factor, in algemeenheid van opvatting niet vergeleken kan worden met het doel, dat men zich bij de toepassing dezer laatste methode voorstelt. Ook in dit opzicht staan dus die methoden ver bij deze achter.

60. **Andere wegen van onderzoek.** Vóór dat Mayr in 1868 zijne schoone onderzoekingen over de integreerende vergelijking had bekend gemaakt, trachtte men langs geheel andere wegen tot de kennis van den integreerenden factor eener gegeven differentiaal-vergelijking te geraken. De eerste, die deze wegen insloeg, was Euler, wiens „Institutiones calculi integralis" met betrekking tot den rijk-

dom van de daarin voorhanden bouwstof, ook in dit opzicht, steeds een onovertroffen werk zullen blijven; zoodat het ons niet kan bevreemden, dat de theorie van den integreerenden factor voor de differentiaal-vergelijkingen van de tweede en hoogere orde na hem op denzelfden trap van ontwikkeling bleef staan, totdat een nieuwe weg was ingeslagen, welke door den grooten man wel was gebaand, maar nog niet was betreden. Tot zoolang waren dan ook bovengenoemde wegen van groot belang voor de wetenschap, maar sedert is dit ten sterkste verminderd: met de beschouwing dier wegen zullen wij dan ook zeer kort zijn.

61. **Betrekkingen tusschen de coëfficienten, enz.** In de eerste plaats stelt Euler zich de vraag: welke betrekkingen moeten er tusschen de coëfficienten eener lineaire vergelijking, bijv.

$$y''' + X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y + X = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

bestaan, opdat zij een bepaalden integreerenden factor heeft; deze zij hier

$$\phi = e^{px},$$

waarin p een standvastig getal voorstelt. Door het vroeger beschouwde kenmerk komt hij alsdan tot de betrekking

$$p^3 - X_2 p^2 + (X_1 - 2\, d_x X_2)\, p - (X_0 - d_x X_1 + d_x^2 X_2) = 0,$$

waaraan bij eene bepaalde waarde van p bijna nooit zal worden voldaan.

Van meer gewicht is dan ook het omgekeerde vraagstuk: de waarde van p te bepalen, die e^{px} tot een integreerenden factor maakt van de beschouwde vergelijking. Wordt hierbij ondersteld, dat p onafhankelijk is van x, dan komt men natuurlijk tot dezelfde betrekking als boven, die echter nu voor bekende waarden van X_2, X_1 en X_0 de waarden van p moet opleveren. Die betrekking is steeds van denzelfden graad als de orde der lineaire vergelijking, maar slechts in enkele gevallen (bijv. wanneer X_2, X_1 en X_0 niet van x afhangen) zal zij bij eene vergelijking der n^e orde ook n integreerende factoren opleve-

ren. Die factoren zijn steeds te gebruiken, dat is: complexe waarden van p kan men ook bezigen, hoewel zij tot zeer omslachtige en lastige bewerkingen aanleiding kunnen geven. Zien we de groote moeilijkheden aan de bepaling van p verbonden over het hoofd, dan blijft hier het hoofdbezwaar, dat p niet van x mag afhangen, wat bij niet-lineaire vergelijkingen bijna steeds, bij lineaire veelal het geval wèl zal zijn, door dat alleen in sommige gevallen de vergelijking integreerende factoren van den gegeven vorm kan bezitten.

Voor de lineaire vergelijking der 2e orde

$$y'' + X_1 y' + X_0 y + X = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (35)$$

krijgt men de betrekking

$$p^2 - pX_1 + (X_0 - d_x X_1) = 0,$$

welke voor de Spitzersche vergelijking overgaat in

$$(a_2 + b_2 x) p^2 + (2b_2 - a_1 - b_1 x) p + (a_0 - b_1 + b_0 x) = 0,$$

wier coëfficienten overeenkomen met die van vergelijking (37b). Hoewel het uit den aard der zaak volgt, is het toch merkwaardig, dat de verkregen vergelijking geene, ééne of twee van x onafhankelijke waarden voor p zal opleveren, naargelang de vergelijkingen (37c) geen, één of twee wortels gemeen hebben. Met de gevolgtrekking, die wij dáár maakten, hadden wij dus ook de beschouwing van dezen weg kunnen besluiten.

Zoo geeft de eenvoudige, door de Spitzersche methode lastig te behandelen vergelijking

$$y'' + (1 - x) y' - (1 + x) y = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (40)$$

voor de bepaling van p de vergelijking

$$p^2 + (x - 1) p - x = 0; \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (40^a)$$

en dus

$$p = 1 \quad \text{en} \quad p = -x;$$

welke laatste waarde blijkbaar onbruikbaar is, daar de betrekking (40a) is opgemaakt in de onderstelling dat p

standvastig is. Wij vinden dus hier slechts één integreerenden factor

$$\Phi_1 = e^x,$$

waarmede de eerste integraal

$$y' - xy = C_1 e^{-x}$$

overeenkomt.

62. Verder tracht Euler betrekkingen op te sporen, die tusschen de coëfficienten eener lineaire differentiaal-vergelijking moeten bestaan om de bepaling van de integreerende factoren mogelijk te maken. Zoo wordt de vergelijking der tweede orde

$$y'' + X_1 y' + X_0 y + X = 0 \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

gemakkelijk integreerbaar, wanneer men X_1 en X_0 verbindt door de voorwaarde

$$X_0 - d_x X_1 = 0;$$

daardoor toch gaat de bovengevonden betrekking over in

$$p(p - X_1) = 0,$$

eene vergelijking waaraan door

$$p = 0$$

wordt voldaan, ten blijke dat de gegeven vergelijking eene volkomen differentiaal is geworden.

Het opsporen van zulke betrekkingen mist thans bijna alle practische en theoretische waarde; zelden toch zal tusschen de coëfficienten eener vergelijking zulk eene betrekking bestaan, en heeft dit bij toeval plaats, dan zal men voor hare integratie toch meestal den directen weg boven dezen indirecten verkiezen. Alleen kan het dienen voor de constructie van differentiaal-vergelijkingen, die bepaalde integreerende factoren hebben; iets waarmede Euler zich te recht zeer veel bezighield, doch dat voor ons zoo weinig waarde heeft, dat wij er verder over kunnen zwijgen.

63. **Aannemen van den integreerenden factor en der**

eerste integraal. Een enkele weg, door Euler ingeslagen, wordt ook thans somtijds nog betreden: men kan namelijk den vorm van den integreerenden factor en dien van de overeenkomstige eerste integraal der beschouwde vergelijking aannemen en door differentieeren en elimineeren betrekkingen afleiden tusschen de coëfficienten van den integreerenden factor en die van de aangenomen integraal. Zoo stelt Euler o. a. dat de vergelijking

$$y'' + \frac{ay}{(by^2 + c + 2dx + ex^2)^2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (41)$$

tot integreerenden factor heeft den vorm

$$\Phi = 2\,X_1 y' + 2\,X_2 y,$$

en hiermede vermenigvuldigd voor eerste integraal geeft

$$X_1 y'^2 + 2X_2 yy' + U = C_1,$$

waarin U eene functie van x en y voorstelt.

Na eenige geoorloofde onderstellingen komt hij hierdoor tot den integreerenden factor

$$\Phi = 2\,(c + 2dx + ex^2)\,y' - 2\,(d + ex)\,y,$$

waarmede als eerste integraal overeenkomt

$$(c + 2dx + ex^2)\,y'^2 - 2\,(d + ex)\,yy' + \frac{ay^2}{by^2 + c + 2dx + ex^2} +$$
$$+ ey^2 = C_1.$$

Deze vergelijking is een bijzonder geval van de volgende

$$Xy'^2 - d_x X\,yy' + \frac{ay^2}{by^2 + X} + ey^2 = 0,$$

welke door de substitutie

$$y = u\sqrt{X},$$

overgaat in:

$$X^2 u'^2 + \left[eX\,d_x\left(\frac{d_x X}{2}\right)^2\right]u^2 + \frac{au^2}{bu^2 + 1} = C_1,$$

die voor het geval, dat wij beschouwen, onmiddellijk kan geschreven worden in den vorm

$$U_3 du + X_3 dx = 0,$$

waarin de veranderlijken gescheiden voorkomen.

64. Het spreekt van zelf, dat aan dezen laatsten weg zooveel practische bezwaren verbonden zijn, dat hij in de meeste gevallen tot geene uitkomst zal leiden; zoodat het aantal vergelijkingen, die op deze wijze kunnen worden opgelost, noodwendig zeer beperkt moet zijn. Niettemin is het de eenige weg, welke nog met eenige vrucht bij de niet-lineaire vergelijkingen werd toegepast. Terwijl dan ook de overige beschouwde wegen door de ontwikkeling van de integreerende vergelijking zeer in practische waarde zijn verminderd en zelfs ten deele het recht van bestaan hebben verloren, blijft de laatst behandelde naast dien der integreerende vergelijking bestaan als twee wegen, die bij geheel verschillende vergelijkingen met vrucht kunnen worden ingeslagen [26].

C. HET VASTSTELLEN VAN DEN VORM DER BIJZONDERE INTEGRAAL.

a. De reeksen-vorm.

65. Bij de beschouwing van de voorgaande methode hebben wij gezien, dat de opsporing van de bijzondere integralen eener in de toepassing werkelijk gegevene differentiaal-vergelijking het hoofddoel behoort te zijn, dat men bij de integratie der differentiaal-vergelijkingen moet

---

[26]) De integreerende factor φ van eene vergelijking der n^e orde, die wij in den vorm

$$P_1 y^{(n)} + Q_1 = 0$$

voorstellen, zou nog à priori kunnen afgeleid worden uit de gedeeltelijke differentiaal-vergelijking

$$\frac{\partial (P_1 \varphi)}{\partial x} - \frac{\partial (Q_1 \varphi)}{\partial y^{(n-1)}} = 0,$$

maar de integratie dezer vergelijking onderstelt in bijna alle gevallen de voorafgaande oplossing der beschouwde vergelijking, zoodat wij dezen weg buiten beschouwing kunnen laten.

voor oogen houden. Hoewel dit doel den wiskundigen eerst voor weinige jaren zuiver wetenschappelijk werd aangewezen, hebben toch de grootste wiskundigen van vroeger tijd reeds ingezien, dat in verreweg de meeste gevallen de algemeene integraal eener gegeven differentiaal-vergelijking slechts kan bepaald worden door hare bijzondere integralen op te sporen en uit deze die algemeene integraal samen te stellen. Van daar dan ook, dat de meeste der bekende integratie-methoden uitsluitend de bepaling dier bijzondere integralen beoogen.

Bij de toepassing dier methoden stelt men in het algemeen den vorm der bijzondere integraal vast als eene functie van x en van één of meer nog onbepaalde standvastige grootheden en tracht dan te bepalen vóor welke waarde dezer grootheden die functie als eene bijzondere integraal aan de gegeven differentiaal-vergelijking voldoet. Dikwijls gelukt het daarbij voor de genoemde standvastige grootheden verschillende stelsels van waarden te vinden, voor welke zulks het geval is; en in dat geval heeft men klaarblijkelijk meer bijzondere integralen der differentiaal-vergelijking gevonden.

66. Het ligt voor de hand, dat men hierin des te meer en te beter zal slagen, naarmate de aangenomen vorm der bijzondere integraal meer algemeen is, en zich dus meer functiën in dien vorm laten voorstellen. Men mocht dus de gunstigste uitkomsten verwachten, wanneer men een' vorm kon kiezen, waarin zich alle functiën laten gieten, en mocht alsdan de hoop koesteren tot verschillende onafhankelijke bijzondere integralen te geraken, die alle aan de gegeven differentiaal-vergelijking voldeden. Vroeger meende men zulk een algemeenen vorm in den reeksen-vorm te hebben gevonden en, voordat de theorie van de convergentie en divergentie der reeksen zich genoegzaam had ontwikkeld, stelde men zich voor door het vaststellen van de integraal in dien vorm tot de alge-

meene integraal der differentiaal-vergelijking te moeten geraken. In hoeverre men hierin dwaalde zal uit het volgende blijken.

67. *α*. **Het theorema van Taylor.** Het volledig integreeren eener differentiaal-vergelijking door middel van reeksen komt eenvoudig neer op de oplossing van het vraagstuk: „onderstellende, dat de meest-algemeene waarde van y, die aan de differentiaal-vergelijking voldoet, de eigenschap heeft, dat zij kan worden uitgedrukt door middel eener convergeerende reeks, welke voor eene zekere waarde van x, $x = x_0$ overgaat in $y = y_0$, en alsdan voor $y', y'', \ldots$ $\ldots y^{(n-1)}$ de waarden $y_0', y_0'', \ldots\ldots y_0^{(n-1)}$ oplevert, die reeks te vinden."

Die oplossing steunt, voor het geval, dat de reeks slechts positieve machten van x bevat, op de beide volgende eigenschappen:

1°. bestaat de convergeerende reeks, die de waarde van y aangeeft, werkelijk, dan moet zij dezelfde zijn, die ons het theorema van Taylor zou opleveren (Moigno, p. 686; Bierens de Haan, l. c. §§ 140 en 141) en

2°. door uit de differentiaal-vergelijking door differentiatie de waarden van $y^{(n+1)}, y^{(n+2)}, \ldots\ldots$ af te leiden en daarin, alsmede in de waarde van $y^{(n)}$ uit de gegeven differentiaal-vergelijking, $x = x_0$ te stellen, vindt men de daarmede overeenkomende waarden $y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)}, y_0^{(n+2)}, \ldots\ldots$

zoodat het straks genoemde theorema voor de gezochte integraal zal geven:

$$y_0 = y + \frac{y_0'}{1}(x - x_0) + \frac{y_0''}{1.2}(x - x_0)^2 + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{y_0^{(k)}}{1^{k/1}}(x - x_0)^k \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(X)}$$

Want vooreerst is volgens de onderstelling de reeks in het tweede lid convergent; zij voldoet blijkbaar aan de gegeven differentiaal-vergelijking; en zij bevat naar be-

hooren n willekeurige standvastigen $y_0, y_0', y_0'', \ldots . y_0^{(n-1)}$.

Daar $y_0^n, y_0^{(n+1)}, \ldots .$ van deze afhangen, ontstaan er dus n reeksen, die, naar de genoemde standvastigen gerangschikt, eene bijzondere integraal der gegeven differentiaal-vergelijking opleveren; zoodat niet alleen de algemeene integraal als de som van n bijzondere integralen gevonden wordt, maar tevens het bewijs is geleverd, dat de algemeene integraal niet in eene enkele reeks kan worden ontwikkeld. Alleen in geval één of meer bijv. m standvastigen $y_0, y_0', y_0'', \ldots . . y_0^{(n-1)}$ gelijk nul worden, vindt men op deze wijze in plaats van n slechts $n - m$ reeksen, zoodat nu niet de algemeene integraal, maar slechts $n - m$ bijzondere integralen worden bepaald. Wordt één of meer dier standvastigen of ook der daaruit afgeleide $y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)}, \ldots . .$ oneindig groot, dan zal (X) ook niet meer de algemeene integraal kunnen voorstellen; en zulks zal evenmin het geval kunnen zijn, wanneer voor eene aangenomen waarde van x_0 onder de bovengenoemde n reeksen divergeerende voorkomen.

Zal dus (X) inderdaad de algemeene integraal eener gegeven differentiaal-vergelijking zijn, dan moet men aan x_0 eene zoodanige waarde geven, dat geene der willekeurige standvastigen nul of oneindig wordt, en dat tevens de n reeksen, die men verkrijgt alle te gelijk bestaan en dus alle voor die waarde convergeeren. Dit is echter zelden het het geval en wel des te minder, naarmate n grooter en dus de orde der differentiaal-vergelijking hooger is. Gewoonlijk zal slechts eene enkele dier reeksen voor die waarde convergeeren, zoodat dan de overige als onbruikbaar moeten verworpen worden; en dus het theorema van Taylor niet bij machte is de algemeene integraal op te leveren.

68. β. **Het theorema van Maclaurin**. De bovenvermelde reeks van Taylor is gerangschikt naar de opklimmende

machten van $x - x_0$; in vele gevallen is het echter verkieslijk haar onmiddellijk gerangschikt te hebben volgens de opklimmende machten van x, en maakt men daarom gebruik van het theorema van Maclaurin, of wat op hetzelfde neerkomt, stelt men $x_0 = 0$, waardoor men verkrijgt

$$y = y_0 + \frac{y_0'}{1} x + \frac{y_0''}{1.2} x^2 + \ldots + \frac{y_0^{(k)}}{1^{k/1}} x^k + \ldots, \quad \text{(XI)}$$

in welke reeks $y_0, y_0', y_0'', \ldots\ldots$ de waarden voorstellen, die $y, y', y'', \ldots\ldots$ verkrijgen voor $x = 0$.

Dat dit laatste niet zoo algemeen kan worden toegepast als het voorgaande, blijkt reeds daaruit, dat men hierbij niet meer vrij is in de keuze der waarde van x_0, voor welke de gevonden n reeksen moeten convergeeren. Valt dan ook 0 niet binnen de grenzen der convergentie, dan zal de verkregen uitkomst òf onvolledig òf onbruikbaar zijn, zooals uit de vorige beschouwing, die overigens hier geheel van toepassing is, volgt.

69. γ. **Het theorema van Bernoulli.** Deze opmerkingen gelden ook voor eene tweede wijziging van het theorema van Taylor, die bekend is onder den naam van het theorema van Bernoulli [27]). Schrijft men dit in den vorm

$$y_0 = y - \frac{y'}{1} x + \frac{y''}{1.2} x^2 - \ldots\ldots + (-1)^k \frac{y^{(k)}}{1^{k/1}} x^k - \ldots \quad \text{(XII)}$$

en past men het achtereenvolgens toe op $y', y'', y''', \ldots$ dan verkrijgt men

$$y_0^{(k)} = y^{(k)} - \frac{y^{(k+1)}}{1} x + \frac{y^{(k+2)}}{1.2} x^2 - \ldots\ldots$$
$$+ (-1)^{k+l} \frac{y^{(k+l)}}{1^{k+l/1}} - \ldots\ldots$$

voor $k = 1, = 2, = 3, \ldots\ldots$

---

[27]) Nova acta Eruditorum, Lips. 1694; Navier, s. 77; Bierens de Haan l. c. § 77.

Is nu de differentiaal-vergelijking van de n^e orde, dan geeft zij $y^{(n)}$ en dus ook alle volgende differentiaal-quotienten, uitgedrukt in x, y, y', ... $y^{(n-1)}$. Substitueert men vervolgens die waarden in de vergelijkingen, welke men verkrijgt voor $k = 0$ tot en met $k = n - 1$, zoo vindt men n differentiaal-vergelijkingen der $(n-1)^e$ orde, welke ieder ééne der grootheden y_0, y_0', y_0'', ... $y_0^{(n-1)}$ als willekeurige standvastige zal bevatten. De eliminatie van y', y'', ... $y^{(n-1)}$ uit deze vergelijkingen levert ons dan de algemeene integraal. Klaarblijkelijk kan men hierbij de substitutie door de eliminatie laten voorafgaan; doet men zulks bij eene vergelijking der tweede orde, dan vindt men

$$y_0 + xy_0 = y - \frac{x^2}{1^{2/1}} y'' + \frac{2x^3}{1^{3/1}} y''' - \frac{3x^4}{1^{4/1}} y^{\text{IV}} + \ldots -$$
$$- (-1)^k \frac{(k-1)x^k}{1^{k/1}} y^{(k)} \ldots\ldots$$

waarin slechts de waarden van y'', y''', y^{IV}, ... voor $x = 0$ behoeven gesubstitueerd te worden.

70. Zooals wij boven opmerkten, moet de waarde van $y^{(n)}$ voor $x = x_0$ of $= 0$ uit de differentiaal-vergelijking zelve bepaald worden; en nu zal het steeds gebeuren, dat reeds dit differentiaal-quotient voor $x = 0$ eene oneindige waarde verkrijgt, wanneer de coëfficient van $y^{(n)}$ als factor eene hoogere macht van x bevat, dan de coëfficient van y of van eenig differentiaal-quotient. In dit geval kunnen de theorema's van Maclaurin en Bernoulli niet tot de algemeene integraal der vergelijking voeren. De onderstelling $x = 0$ is namelijk alsdan alleen geoorloofd, wanneer y of het bovengenoemde differentiaal-quotient ook 0 zijn en dus voor $x = 0$ verdwijnen. Dit laatste geval uitgezonderd, kan men zelfs door die theorema's niet tot een integraal geraken; daartoe moet men dan van dat van Taylor gebruik maken en voor x eene zoodanige waarde x_0 aannemen, dat geene der differentiaal-quotienten oneindig worde. Heeft dit ook niet plaats voor de vermelde uitzondering $y_0 = 0$

of $y_0^{(k)} = 0$, dan kunnen de beide genoemde theorema's tot eene bijzondere integraal leiden, welke met deze nulwaarden overeenstemt (Mayr, § 59).

Heeft men bijv. de vergelijking

$$xy''' + A_2 y'' + A_1 xy' + A_0 y = 0, \quad \ldots\ldots (42)$$

en stelt men hierin $x = 0$, dan moet noodwendig ook $y = y'' = 0$ zijn, zoodat men op deze wijze slechts ééne bijzondere integraal der vergelijking zal kunnen vinden. Schrijft men haar nu in den vorm

$$y''' + A_2 \frac{y''}{x} + A_1 y' + A_0 \frac{y}{x} = 0,$$

dan vindt men na de substitutie

$$y_0''' = \frac{0}{0};$$

om de ware waarde dezer functie te bepalen, differentieert men de tellers en noemers der breuken, waardoor men komt tot de vergelijking

$$y''' + A_2 \frac{y'''}{1} + A_1 y' + A_0 \frac{y'}{1} = 0,$$

welke na substitutie en oplossing geeft:

$$y_0''' = -\frac{A_0 + A_1}{1 + A_2} y_0'.$$

Op dezelfde wijze gaat men voorts bij de bepaling van y_0^{IV}, y_0^{V}, ... te werk.

Had men de vergelijking

$$x^2 y''' + A_2 xy'' + A_1 x^2 y' + A_0 y = 0, \quad \ldots\ldots (43)$$

dan zou de waarde van y''' ook bij de onderstelling $y = y'' = 0$ oneindig groot zijn en dus de toepassing der beide theorema's van Maclaurin en Bernoulli niet mogelijk zijn.

71. *δ*. **De onbepaalde coëfficienten.** Bevat de reeks, die de waarde van y moet voorstellen, negatieve of gebrokene machten van x, dan leveren ons de voorgaande theorema's

hoogstens eene bijzondere integraal der gegeven differentiaal-vergelijking, nimmer de algemeene integraal. Om deze laatste zonder de hulp van andere methoden, in den vorm eener reeks te verkrijgen, kan men in dit geval alleen gebruik maken van de methode der onbepaalde coëfficienten; deze toch is geoorloofd, mits men vooraf zeker zij van den vorm der uitkomst. Men stelt daarbij de waarde van y voor door de reeks

$$y = y_0 + a_1 (x - x_0)^{\alpha_1} + a_2 (x - x_0)^{\alpha_2} + a_3 (x - x_0)^{\alpha_3} + ., \quad \text{(XIII)}$$

waarin de onbepaalde van x onafhankelijke coëfficienten en exponenten daardoor moeten bepaald worden, dat de waarde van y moet voldoen aan de gegeven differentiaal-vergelijking en die waarde, alsmede die der differentiaal-quotienten y', y'', $\ldots . y^{(n-1)}$, voor $x = x_0$ de bekende waarden y_0, y_0', y_0'', $\ldots .. y_0^{(n-1)}$ moeten aannemen.

Gewoonlijk schrijft men de voorgaande reeks in den vorm

$$y = a_0 + a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + a_3 x^{\alpha_3} + \ldots . , \quad \text{(XIV)}$$

welke in de toepassing eenvoudiger is. De substitutie dezer waarde in de differentiaal-vergelijking moet eene identieke vergelijking opleveren. Elke der wijzen, waarop aan die identiteit kan worden voldaan, levert de algemeene of eene bijzondere integraal der vergelijking, naargelang het aantal der daarin voorkomende willekeurige standvastigen gelijk of kleiner is dan n.

72. Uit de omstandigheid, dat men aan de zooeven genoemde identieke vergelijking meestal op verschillende wijzen kan voldoen, blijkt, dat men bij de toepassing van deze methode veel vrijer is dan bij die der straks vermelde theorema's. Zijn er dan ook ooit door eene dergelijke ontwikkeling in reeksen nog onbekende integralen in gesloten vorm gevonden, dan is het voorzeker door de methode van de onbepaalde coëfficienten. Bovendien is zij vooral bij de binomische vergelijkingen

$$y^{(n)} = \mathrm{A} x^p y \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44)$$

minder omslachtig in de toepassing. Bij meer samengestelde lineaire en bij niet-lineaire vergelijkingen voeren echter deze ontwikkelingen zonder uitzondering meestal tot veel te ingewikkelde berekeningen, dan dat zij daarbij met vrucht zouden kunnen worden toegepast. Daarbij komt dat bij deze methoden de coëfficienten der reeks een voor een moeten berekend worden, zonder dat zij eenig verband aangeven, dat tusschen deze coëfficienten moet bestaan; en alleen in de eenvoudigste gevallen gelukt het uit de berekende coëfficienten zoodanig verband op te maken. Deze omslachtigheid is dan ook waarschijnlijk de reden, waarom men in de leerboeken over de theorie der differentiaalvergelijkingen zulke eenvoudige, en wat meer verwondering baart, in bijna alle dezelfde voorbeelden van toepassing dezer methoden vindt (voor het theorema van Taylor $y'' = a^2y$ en voor de overige de vergelijking van Riccati in haren oorspronkelijken of gewijzigden vorm of ook voor bepaalde waarden harer coëfficienten) [28]).

73. Boven hebben wij reeds opgemerkt, dat het theorema van Taylor algemeener is dan die van Maclaurin en Bernoulli en somtijds nog de algemeene integraal eener differentiaal-vergelijking kan opleveren, wanneer bij deze laatste de onderstelling $x = 0$ eene tweede onderstelling medebrengt, die oorzaak wordt, dat men alleen eene bijzondere integraal kan bepalen. Bij de methode van de onbepaalde coëfficienten vertoont zich eene omstandigheid, die geheel met deze laatste overeenkomt en niet tot de onbruikbaarheid, maar wel tot de onvolledigheid der integraal leidt. Komen namelijk in de algemeene integraal termen voor, die de logarithme van x bevatten, dan zal deze methode, op welke wijze men ook aan de identiteit der door de sub-

[28]) Zie Moigno, Duhamel, Navier, Cournot, Boole, Dienger, Sturm, Schlömilch, Mayr, enz.

stitutie van de reeks (XIV) verkregen vergelijking tracht te voldoen, slechts eene bijzondere integraal opleveren.

Zoo geeft bijv. de vergelijking

$$x^4 y'' + x^3 y' + y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

na substitutie van bovengenoemde reeks de identieke vergelijking:

$$a_0 + a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + a_3 x^{\alpha_3} + \ldots\ldots =$$
$$= -\left(a_1 \alpha_1^2 x^{\alpha_1 + 2} + a_2 \alpha_2^2 x^{\alpha_2 + 2} + a_3 \alpha_3 x^{\alpha_3 + 2} + \ldots\right) \quad (45_a)$$

Stelt men hierin de overeenkomstige termen der beide leden aan elkaar gelijk, dan verkrijgt men voor de exponenten de waarden

$$\alpha_1 = -2, \alpha_2 = -4, \alpha_3 = -6, \ldots\ldots\ldots$$

en voor de coëfficienten:

$$a_1 = -\frac{a_0}{2^2}, a_2 = \frac{a_0}{2^2.4^2}, a_3 = -\frac{a_0}{2^2.4^2.6^2}, \ldots\ldots\ldots$$

zoodat men voor de reeks zelve vindt:

$$y = a_0 \left[1 - (2.x)^{-2} + (2.4.x^2)^{-2} - (2.4.6.x^3)^{-2} + \ldots\ldots\right];$$

dus eene bijzondere integraal. Door welke andere veronderstelling men ook aan de identiteit der gevonden vergelijking (45_a) tracht te voldoen, steeds komt men tot die bijzondere integraal terug. De oorzaak hiervan ligt daarin, dat de tweede onafhankelijke bijzondere integraal een term bevat, waarin lx voorkomt. Bepaalt men dan ook door de methode van de variatie der standvastigen de algemeene integraal (zie § 157), dan vindt men voor deze

$$y = \left[1 - (2.x)^{-2} + (2.4.x^2)^{-2} - (2.4.6.x^3)^{-2} + \ldots\right] \Big[C_1 +$$
$$+ C_2\left(lx - \frac{b_1}{2x^2} - \frac{b_2}{4x^4} - \ldots\ldots\right)\Big];$$

waarin b_1, b_2, ... gemakkelijk te bepalen getallen-waarden voorstellen.

Zooals dit voorbeeld ons leert, maakt deze onvolledig-

heid alleen in zoover bezwaar, dat men zich daarbij steeds van eene aanvullings-methode moet bedienen, welke in dat geval (vooral wanneer men met niet-sommeerbare reeksen te doen heeft) dikwijls zeer lastige berekeningen vereischt.

74. Bevat echter elke bijzondere integraal termen, waarin lx voorkomt, dan brengt ons de methode niets verder en levert zij zelfs nog geene onbruikbare reeks. Dit is bijv. het geval met de vergelijking.

$$y'' - \frac{2}{x\,lx}\,y' + \frac{2+lx}{(x\,lx)^2}\,y = 0; \ldots \ldots \quad (46)$$

substitueert men hierin de waarde (XIV), dan verkrijgt men:

$$a_0\,(2+lx) + \Sigma a_k\,\{2 + lx\,[1 - 2\alpha_k + \alpha_k\,(\alpha_k - 1)\,lx]\}\,x^{\alpha_k} = 0,$$

waaraan door standvastige waarden van α_k en a_k niet kan worden voldaan, of het moest zijn:

$$\alpha_k = 0 \quad \text{en} \quad \Sigma a_k = -a_0,$$

wat tot niets leidt ($y = 0$).

Het schijnt, dat men tot hiertoe niet naar middelen heeft uitgezien om ook in dit geval door de methode der onbepaalde coëfficiënten tot de algemeene integraal te geraken. Dit middel ligt echter voor de hand: neemt men namelijk in aanmerking, dat lx niet in eene reeks kan ontwikkeld worden, welke volgens de opklimmende of afdalende machten van x is gerangschikt, en dat dit de eenige oorzaak is van het niet-slagen der methode; dan is het klaar, dat deze oorzaak geheel zal worden weggenomen, wanneer men gebruik maakt van de reeks

$$y = a_0 + a_1\,x^{\alpha_1}\,(lx)^{\beta_1} + a_2\,x^{\alpha_2}\,(lx)^{\beta_2} + \ldots; \quad \text{(XV)}$$

schrijft men deze in den vorm

$$y = a_0 + \Sigma\,a_k\,x^{\alpha_k}\,(lx)^{\beta_k},$$

dan vindt men

$$y' = \Sigma\, a_k\, x^{\alpha_k - 1} (lx)^{\beta_k - 1} [\alpha_k\, lx + \beta_k],$$

$$y'' = \Sigma\, a_k\, x^{\alpha_k - 2} (lx)^{\beta_k - 2} \{\alpha_k\, lx + (\alpha_k\, lx + \beta_k) [(\alpha_k - 1)\, lx + \\ + (\beta_k - 1)]\}.$$

Substitueert men nu deze waarden in de beschouwde vergelijking (46), dan verkrijgt men:

$$a_0 (2 + lx) + \Sigma\, a_k\, x^{\alpha_k} (lx)^{\beta_k} \{\alpha_k (\alpha_k - 1) (lx)^2 + \\ + (2\alpha_k - 1)(\beta_k - 1)\, lx + (\beta_k - 1)(\beta_k - 2)\} = 0.$$

Zal deze vergelijking identiek zijn, dan moet behalve $a_0 = 0$,

$$\alpha_k (\alpha_k - 1) = 0,$$
$$(2\alpha_k - 1)(\beta_k - 1) = 0,$$
$$(\beta_k - 1)(\beta_k - 2) = 0,$$

zijn. Aan de eerste dezer vergelijkingen wordt voldaan door $\alpha_k = 0$ of $\alpha_k = 1$.

Met $\alpha_k = 0$ stemt overeen $\beta_k = 1$, zoodat dit geeft de bijzondere integraal

$$y = \Sigma\, a_k .\, lx,$$

of wat hetzelfde is:

$$y = C_1\, lx.$$

Uit $\alpha_k = 1$ volgt ook $\beta_k = 1$, en dit leidt ook tot eene bijzondere integraal

$$y = \Sigma\, a_k .\, xlx$$

waarvoor men kan schrijven, daar de a^s geheel willekeurig blijven

$$y = C_2\, xlx.$$

Wijl voorts de gegeven differentiaal-vergelijking lineair is, vindt men voor hare algemeene integraal

$$y(= C_1 + C_2\, x)\, lx.$$

Door voor een deel der termen $\alpha_k = 0$ en voor de overige $\alpha_k = 1$ te stellen, komt men onmiddellijk tot deze algemeene integraal.

75. Meer dan omslachtigheid en onvolledigheid de toepassing der voorgaande methoden in den weg staan, doet het de beperking, die als een uitvloeisel van het wezen dier methoden, door geene andere integratie-methode kan worden aangevuld of weggenomen. Zoo als wij reeds bij de beschouwing van het theorema van Taylor zagen, kan dit ons alleen dan de algemeene integraal der gegeven differentiaal-vergelijking opleveren, wanneer de n bijzondere integralen, die als n afzonderlijke reeksen gevonden worden, voor de aangenomen waarde $x = x_0$ bestaan en dus alle convergeeren. Dit kan echter niet altijd het geval zijn en dat wel des te minder, naarmate de orde der differentiaal-vergelijking stijgt. Gewoonlijk zullen voor de waarde x_0 van x slechts als bij toeval enkele der n reeksen convergeeren, en dus ook maar die enkele reeksen als bijzondere integralen der vergelijking kunnen beschouwd worden; terwijl de overige als onbruikbaar moeten worden verworpen. Welke der reeksen voldoen, hangt geheel en al van de differentiaal-vergelijking zelve en van de waarde van x_0 af en moet afzonderlijk worden bepaald. Men moet dus hierbij met zeer veel omzichtigheid te werk gaan en dat wel nog meer bij de toepassing van het theorema van Taylor dan bij die van Maclaurin of Bernoulli, daar men bij deze laatste in de keuze van de waarde van x_0 niet vrij is en de differentiaal-vergelijking zelve bij de aangewezen waarde $x_0 = 0$ in vele gevallen reeds een zeker aantal onbruikbare reeksen doet wegvallen; toch zullen ook hierbij onder de verkregen reeksen nog onbruikbare voorkomen, die, wanneer zij niet uit de overige worden afgezonderd, tot eene valsche uitkomst zullen leiden.

De theorema's van Taylor, Maclaurin en Bernoulli kunnen derhalve niet onvoorwaardelijk dienen tot de bepaling van de nog onbekende algemeene integraal eener differen-

tiaal-vergelijking van de tweede en hoogere orde [29]); wil men ze dan ook met vrucht toepassen, dan moet men de convergentie der verkregen reeksen onderzoeken, of men moet zich beperken tot het zoeken naar eene enkele, met eene vooraf getoetste waarde van x_0 overeenkomende reeks, die dan als eene werkelijke (bijzondere) integraal aan de differentiaal-vergelijking zal voldoen.

76. De vorige redeneering past met eenige wijziging ook op de methode der onbepaalde coëfficienten. Ook deze kan niet onvoorwaardelijk worden toegepast, daar zij alleen in zoover geldt als y doorloopend blijft, wanneer x tot eene bepaalde waarde nadert. Immers berust hare toepassing geheel en al op de onderstelling, dat men x zoodanig mag nemen, dat elke term der verkregen reeks grooter wordt dan de som van al de volgende termen; en, waar dit niet mogelijk is, kan dus ook de methode niet gebezigd worden en moeten de reeksen, die zij oplevert, als onbruikbaar worden verworpen. Voor de algemeene integraal eener differentiaal-vergelijking behoeft men steeds n reeksen ieder met eene willekeurige standvastige vermenigvuldigd, die voor eene zelfde waarde van x bestaan en dus alle voor die waarde convergeeren. Waar de methode niet tot zoodanige reeksen voert, kan zij die algemeene integraal niet opleveren; past men haar in dat geval toch toe, dan zal men tot eene ongerijmde en valsche uitkomst geraken. (Mayr, § 63). Men moet bovendien hierbij niet uit het oog verliezen, dat de som van n onafhankelijke bijzondere integralen eener niet-lineaire differentiaal-vergelijking niet als hare algemeene integraal mag worden beschouwd, wijl het, voor deze vormings-wet der algemeene integraal, door Euler gegeven bewijs (§ 85), alleen voor lineaire vergelijkingen geldt (§ 91). —

[29]) Bij de differentiaal-vergelijkingen der eerste orde wordt de algemeene integraal door eene enkele reeks aangegeven, van welker convergentie de bruikbaarheid dezer methoden afhangt.

77. De waarde der bruikbare reeksen, die door de voorgaande methoden worden verkregen, hangt geheel en al af van het doel, waarmede de integratie is verricht. Was dit doel de getallen-waarde van y te bepalen, die met eene bepaalde waarde van x overeenkomt, dan staan die reeksen in gelijken rang met de integralen in gesloten vorm, want zij leenen zich in het algemeen zeer goed voor de benadering dier getallen-waarde, zelfs tot op een zeer hoogen graad van nauwkeurigheid. De afleiding dezer getallen-waarde uit genoemde reeksen is dan ook verre te verkiezen boven de onmiddellijke afleiding derzelve uit de differentiaal-vergelijking (Duhamel, p. 16; Cournot, p. 317), zoowel om de meerdere eenvoudigheid als om de grootere kortheid van de bewerking.

In verreweg de meeste gevallen is ons echter weinig of niets aan die getallen-waarde gelegen, vooral ook omdat de standvastige der integratie daarop zooveel invloed heeft. De integratie eener differentiaal-vergelijking geschiedt bijna altijd met het doel om uit den vorm der bijzondere integralen de eigenschappen der functie af te leiden; en met het oog hierop kan men aan de gevonden reeksen luttel waarde toekennen (zie § 11).

78. Het gebeurt echter somtijds, dat die reeksen bij een zekeren term afbreken en dus in een gewoon polynomium overgaan, of dat men hare sommen in gesloten functiën kan voorstellen. Zulks zal vooral bij zeer eenvoudige lineaire differentiaal-vergelijkingen het geval zijn, en alsdan heeft men de integraal in haren gesloten vorm verkregen. Komt men op deze wijzen niet tot een gesloten integraal, dan blijft bovendien nog altijd de mogelijkheid over, dat men de betrekkingen, welke tusschen de coëfficienten dier reeksen bestaan, bij de bepaalde integralen terugvindt (wat hoofdzakelijk bij de gamma-functiën plaats heeft) en, door die overeenkomst geleid, er in slaagt, om de som dier reeksen in bepaalde integralen uit te drukken.

Zoo vindt men bijv. door de toepassing van de methode der onbepaalde coëfficienten op de differentiaal-vergelijking

$$y'' + \frac{A_1}{x} y' + A_0 y = 0, \ldots \ldots \ldots \quad (47)$$

de identieke vergelijking

$$a_1 \alpha_1 (\alpha_1 - 1 + A_1) x^{\alpha_1 - 2} + a_2 \alpha_2 (\alpha_2 - 1 + A_1) x^{\alpha_2 - 2} + \ldots\ldots$$
$$+ A_0 a_0 + A_0 a_1 x^{\alpha_1} + A_0 a_2 x^{\alpha_2} + \ldots\ldots = 0,$$

aan welke voldaan wordt door

$$a_0 = 0,$$
$$\alpha_1 (\alpha_1 - 1 + A_1) = 0,$$
$$\alpha_k = \alpha_{k-1} + 2$$

en $$A_0 a_{k-1} + a_k \alpha_k (\alpha_k - 1 + A_1) = 0.$$

De tweede en derde dezer vergelijkingen bepalen de waarden der exponenten, terwijl de vierde het verband aangeeft, dat tusschen de coëfficienten der reeksen moet bestaan. Een geheel analoog verband vindt men tusschen de beide integralen der vergelijking

$$\int_0^\pi Cos^{\alpha_k} u \, Sin^{A_1 - 1} u \, du =$$
$$= \frac{\alpha_k - 1}{\alpha_k - 1 + A_1} \int_0^\pi Cos^{\alpha_k - 2} u \, Sin^{A_1 - 1} u \, du.$$

De verhouding dezer beide integralen is, op een standvastigen factor na, gelijk aan de verhouding

$$\frac{a_k}{a_{k-1}};$$

en van deze gelijkheid van verhouding wordt partij getrokken om de reeksen, die als uitkomst der bovengemelde substituties worden verkregen, in den vorm dier bepaalde integralen te gieten (Moigno, p. 698; Sturm, p. 143).

Gelden nu die bepaalde integralen voor dezelfde waarden van A_1, dan heeft men voor die waarden de algemeene integraal der gegeven differentiaal-vergelijking in een gesloten vorm; voor alle overige waarden van A_1 zal men

òf eene bijzondere, òf geen integraal der vergelijking verkregen hebben. Men dient hierop vooral te letten; zoo vindt men voor bovenstaande vergelijking (47) de bijzondere integralen (Sturm, p. 143; Duhamel, p. 120):

$$y_1 = \int_0^\pi Cos\,(x\sqrt{A_0}\; Cos\,u)\; Sin^{A_1-1}\,u\,du$$

en

$$y_2 = x^{1-A_1}\int_0^\pi Cos\,(x\sqrt{A_0}\; Cos\,u)\; Sin^{1-A_1}\,u\,du,$$

waarvan de eerste geldt voor $A_1 > 0$ en de tweede voor $A_1 < 2$; alleen voor

$$0 < A_1 < 2$$

zal men dus voor de algemeene integraal vinden

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Valt A_1 buiten of ook op die grenzen, dan zal slechts ééne der bijzondere integralen bestaan, die door de formule

$$y = C_1 y_1 + C_3 y_1 \int \frac{dx}{x^{A_1}\, y_1^2},$$

kan worden aangevuld.

Voor $A_1 = 1$ lossen de beide bijzondere integralen zich schijnbaar in ééne enkele op; om ook in dit geval tot de algemeene integraal te geraken kan men op dezelfde wijze te werk gaan; beter echter past men dan de methode van d'Alembert toe (§ 176).

79. Gelukt op die wijzen de sommatie der verkregen reeksen, dan verkrijgt daardoor de integratie volgens de voorgaande methoden eene veel hoogere waarde. Zulks is echter zelden het geval voor de differentiaal-vergelijkingen, van welke de integralen niet reeds door andere methoden in gesloten vormen zijn bepaald. De ongenoegzame ontwikkeling van de theorie der bepaalde integralen ter eene en de ingewikkeldheid van de vormings-wet der coëfficienten, ter andere zijde beperken het aantal differentiaal-vergelijkingen, wier integralen op die wijze met vrucht kun-

nen worden behandeld. Gewoonlijk moet men dan ook, wanneer men gedwongen is bij de integratie-methoden der reeksen zijne toevlucht te zoeken, zich tevreden stellen met de integraal in den vorm van reeksen, wier aantal, zooals wij gezien hehben, in den regel minder dan n bedraagt.

80. Het schijnt dat alle wiskundigen hetzelfde oordeel vellen over deze integratie-methode door middel van reeksen: „wanneer het u niet gelukt door eenige andere methode eene gegeven differentiaal-vergelijking op te lossen, past dan de integratie-methode der reeksen toe" — is een raad, dien ieder wiskundige u zal geven en die het „in geen ander geval" in zich sluit.

Kan dan ook eene differentiaal-vergelijking behalve door de methode der reeksen nog door eenige andere methode worden geïntegreerd, dan voert deze laatste steeds langs een veel korteren en meer eenvoudigen weg tot het eigenlijke doel, de gesloten integraal, dan de eerste.

Bij de differentiaal-vergelijkingen, wier integraal in een gesloten vorm is verkregen, wordt dan ook bijna nooit de integratie-methode der reeksen toegepast; en bij de vergelijkingen, wier integraal men nog niet in een gesloten vorm kan brengen, loont meestal de geringe waarde der uitkomst de moeite niet, die aan de toepassing der methode is verbonden. Daarbij steunt zij op een beginsel, dat met de convergentie en divergentie der verkregen reeksen staat en valt, zoodat men in het onzekere blijft verkeeren, of men als uitkomst der omslachtige bewerkingen, die men heeft te verrichten, eene integraal of eenige niets beteekenende reeksen of wel beide gezamenlijk zal vinden.

De volstrekte algemeenheid, die men aan deze methode dikwijls heeft toegeschreven, bestaat derhalve niet; niet zoo zeer omslachtigheid in bewerking en daaraan verbon-

den technische moeilijkheden, als wel bezwaren, die aan het wezen der methode eigen zijn en de onbruikbaarheid der uitkomst ten gevolge hebben, ontzeggen haar geheel en al den naam van algemeene integratie-methode in dien zin, waarin wij dat woord gewoonlijk opvatten. Evenals elke differentiaal-vorm door middel van reeksen kan worden geïntegreerd, wil ook elke differentiaal-vergelijking algemeen geïntegreerd worden; tot die algemeene integratie kunnen echter die reeksen niet dienen, daartoe bepalen zich hare uitkomsten tot een veel te beperkt gebied.

Vat men echter die algemeene integratie in een anderen zin op en bepaalt men zich tot de afleiding van eene enkele reeks, die met eene vooraf getoetste waarde van x_0 overeenkomt, en derhalve ook bij die waarde convergeert, dan zal zonder eenige beperking de integratie van alle differentiaal-vergelijkingen door deze methode mogelijk zijn.

Bij deze laatste opvatting verkrijgen ook de reeksen van Taylor, Maclaurin en Bernoulli, alsmede die der onpaalde coëfficienten, eene geheel andere beteekenis; zij blijven niet meer de algemeene reeksen, die gelijktijdig voor alle bijzondere integralen doorgaan, maar worden bijzondere reeksen, die slechts onder bepaalde omstandigheden voor eene enkele bijzondere integraal gelden. Alleen in dezen zin mogen die reeksen dan ook onvoorwaardelijk worden toegepast en zullen zij ontwijfelbaar tot eene goede uitkomst kunnen leiden. De aangeduide beperking strekt derhalve om de toepassing der methoden meer algemeen (geldend) te maken.

81. Om de theoretische waarde dezer methoden te leeren kennen, moet men echter deze beperking niet in acht nemen. In den algemeenen zin genomen levert elk dier methoden de algemeene integraal eener differentiaal-vergelijking der n^e orde in den vorm van n afzonderlijke reeksen, die elk voor zich eene bijzondere integraal voorstellen.

Zij stellen dus den vorm dier algemeene integraal vast; nemen de dwaling weg dat deze uit eene enkele reeks zou kunnen verkregen worden, en toonen algemeen aan, dat de *n* willekeurige standvastigen, die men der algemeene integraal toeschrijft, een noodwendig deel derzelve uitmaken, zoodat met het verminderen van het aantal dezer standvastigen de algemeenheid der integraal vervalt. Dat de genoemde methoden dit alles zoo beslissend vaststellen, verleent haar eene hooge theoretische waarde.

82. Heeft men nu met reeksen te doen, die slechts positieve machten van x bevatten, dan vallen de reeksen, die deze verschillende methoden opleveren, samen; toch is om de meerdere vrijheid in de toepassing en de mindere omslachtigheid in de bewerking ook in dit geval de anders alleen toepasselijke methode der onbepaalde coëfficienten te verkiezen, zoodat wij in het vervolg, wanneer wij over de ontwikkeling der integraal door reeksen spreken, bijna uitsluitend deze methode zullen bedoelen [30]).

b. De gesloten vorm.

α. De Eulersche vormen.

83. Onder de differentiaal-vergelijkingen, die door de grootste wiskundigen met bijzondere voorliefde werden onderzocht, komen in de eerste plaats de lineaire in aanmerking. Twee oorzaken werkten daartoe samen: vooreerst geven namelijk de meeste onderzoekingen op het gebied der Natuurkunde, Werktuigkunde en Sterrenkunde als uitgangspunt of als eerste uitkomst eene lineaire differentiaal-

---

[30]) De beschouwing van de overige bekende wijzen, waarop men de integraal eener gegeven differentiaal-vergelijking in reeksen kan ontwikkelen, laten wij hier achterwege, èn omdat zij niet worden toegepast, èn omdat men hun aantal nog zeer kan vermeerderen door gebruik te maken van de omkeeringsreeksen van Lagrange, Laplace e. a. — Moigno, § 274—5; Duamel, p. 128. Zie voorts Noot 43).

vergelijking of een stelsel van lineaire differentiaal-vergelijkingen, zoodat deze lineaire vergelijkingen als de in de toepassing meest gewichtige werden en nog worden aangezien; en ten andere levert de oplossing dier vergelijkingen niet de groote technische moeilijkheden op, die de integratie van de niet-lineaire vergelijkingen dikwijls practisch onuitvoerbaar maken.

84. In den regel kwam men tot eene bijzondere integraal van zulk eene lineaire vergelijking door eene gelukkige veronderstelling aangaande den vorm der gesloten uitdrukking, die de eigenschap heeft aan haar te voldoen. Men ging dus hierbij uit van hetzelfde beginsel, waarop de vorige integratie-methoden der reeksen steunen; terwijl echter bij deze laatste den vorm eener bijzondere integraal werd vastgesteld in eenen in 't algemeen voor elke functie geldigen vorm, en dus algemeenheid van toepassing bij de keuze van dien vorm de hoofd-gedachte uitmaakte, — schikte men zich bij de integratie der lineaire vergelijkingen zooveel mogelijk naar het wezen en karakter dier vergelijkingen, zoodat men hierbij de meerdere of mindere algemeenheid van den aangenomen vorm geheel over het hoofd zag. Men nam daarbij steeds gesloten uitdrukkingen en alleen, ingeval het niet gelukte, op die wijze tot de integraal der vergelijking te geraken, zocht men zijn toevlucht in den reeksenvorm.

Bij het aldus vaststellen van den vorm der bijzondere integraal in een gesloten vorm kan men zich echter geheel vrij bewegen, daar de uitkomst der substitutie toch van zelve uitwijst of de integraal in dien vorm kan voorkomen of niet. Het voldoen aan de gegeven differentiaalvergelijking is hierbij geheel en al afhankelijk van het voldoen aan de vergelijking, die men verkrijgt als gevolg van de substitutie der aangenomen bijzondere integraal. Heeft men bijv. gesteld

$$y = \phi\,(x, m, n, p, \ldots\ldots),$$

waarin m, n, p, ... niet van x afhangen, en kan aan de komende vergelijking door van x onafhankelijke waarden van m, n, p, ... worden voldaan, zoo verkrijgt men werkelijk bijzondere integralen van den aangenomen vorm, en wel even zooveel als er verschillende stelsels van zoodanige waarden van m, n, p, ... aan die verkregen vergelijking voldoen.

85. Het was bijv. bekend dat de herleide lineaire vergelijking der eerste orde

$$y' + Ay = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

tot integraal heeft

$$y = e^{-Ax},$$

en deze uitkomst verbonden met de bekende standvastigheid in vorm van de differentiaal-quotienten van de exponentieele, leidde Euler er toe om den invloed van de substitutie van

$$y = e^{mx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (XVI)$$

op de herleide lineaire vergelijking met standvastige coefficienten te onderzoeken; en deed hem door middel van de équation caractéristique de n bijzondere integralen der genoemde vergelijking vinden. Elke dezer bijzondere integralen werd nu met eene willekeurige standvastige vermenigvuldigd en de som dezer produkten leverde op nieuw eene uitdrukking, die aan de beschouwde vergelijking voldeed, en de volledige integraal dier vergelijking was of niet, naargelang het gevorderde aantal van n willekeurige standvastigen voorhanden was of niet.

Gaf de équation caractéristique complexe wortels, dan wist men toch de bijzondere integraal wel in een bestaanbaren vorm te gieten door aan de overeenkomstige willekeurige standvastigen complexe waarden toe te kennen; waren daarentegen eenige wortels dier vergelijking gelijk, dan maakte men de overeenkomstige bijzondere integralen ongelijk door aan die standvastigen oneindige waarden te

geven van de eerste, tweede en hoogere orde. Men noemde zulks: „zich bedienen van een kunstgreep" [31]).

86. Had de vergelijking geene standvastige coëfficienten, maar hadden hare termen den vorm

$$A_k (a + bx)^k y^{(k)},$$

dan herleidde men deze door de substitutie

$$a + bx = e^u$$

tot eene lineaire vergelijking in u en x met standvastige coëfficienten, of men stelde als vorm der bijzondere integraal vast

$$y = (a + bx)^m$$

en paste zoo noodig weder dezelfde kunstgrepen toe.

87. De ontwikkeling van de methode van den integreerenden factor heeft, zooals wij reeds gezien hebben, aan deze gekunstelde oplossingen een einde gemaakt. Theoretisch is door haar de vorm dier bijzondere integralen aangegeven en zuiver wetenschappelijk heeft zij den weg voorgeschreven, dien men heeft te volgen, wanneer de équation caractéristique complexe of gelijke wortels oplevert, zoodat dan ook bovengenoemde onderstellingen en kunstgrepen hierbij weinig meer dan geschiedkundige waarde hebben. Wij meenden echter ze te moeten vermelden, omdat zij ook bij andere vergelijkingen van dienst zijn, van welke de oplossing nog niet streng wetenschappelijk is vastgesteld. Vooral de onderstelling, dat

$$y = e^{mx}$$

den vorm der bijzondere integraal aangeeft, zullen we hier nader beschouwen.

---

[31]) O. a.: Petzval, Bd. I. s. 34. „man bedient sich zu diesem Zwecke eines desshalb sehr erwähnenswerthen Kunstgriffes, weil er sehr schnell zum Ziele führt..... Der Kunstgriff besteht im Wesentlichen darin, dass, u. s. w.

Moigno, p. 605. On a eu recours, pour y parvenir, à divers artifices que nous allons exposer brièvement.

88. Bij den eersten oogopslag schijnt het, dat het niet mogelijk zou zijn, dat ook lineaire vergelijkingen, wier coëfficienten de veranderlijke x bevatten, bijzondere integralen zouden kunnen hebben van den vorm $y = e^{mx}$, daar eensdeels de grootheid m bij de achtereenvolgende differentiaties als eene standvastige wordt behandeld, anderdeels de coëfficienten in de équation caractéristique alsdan van x zullen afhangen en dus m zou moeten bepaald worden uit eene vergelijking van den vorm

$$m^n f_1(x) + m^{n-1} f_2(x) + \ldots + m f_n(x) + f_{n+1}(x) = 0.$$

Bij eenige nadere beschouwing zal men echter gemakkelijk inzien, dat het hierbij kan voorkomen, dat aan deze laatste vergelijking voldaan wordt door waarden van m onafhankelijk van x en in dat geval zal werkelijk, voor die waarden van m, $y = e^{mx}$ een bijzondere integraal zijn der gegeven vergelijking.

Zij bijv. de vergelijking

$$(a_n + b_n x) y^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} x) y^{(n-1)} + \ldots + (a_1 + b_1 x) y' + \\ + (a_0 + b_0 x) y = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (49)$$

dan geeft hierin de genoemde substitutie

$$e^{mx} [M_1 + M_2 x] = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (49^a)$$

waarin

$$M_1 = a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \ldots + a_1 m + a_0$$

en $$M_2 = b_n m^n + b_{n-1} m^{n-1} + \ldots + b_1 m + b_0$$

is. Is nu gelijktijdig

$$M_1 = 0 \qquad \text{en} \qquad M_2 = 0,$$

dat is: hebben deze twee vergelijkingen gemeenschappelijke wortels, dan zullen evenzoovele bijzondere integralen gevonden zijn. Dit zal plaats hebben wanneer M_1 en M_2 een gemeenschappelijken factor M_3 hebben; en nu geeft

$$M_3 = 0$$

de standvastige waarden $m_1, m_2, m_3, \ldots m_k$, voor welke aan (49a) identiek wordt voldaan;

$$y = e^{m_1 x}, y = e^{m_2 x}, \ldots . y = e^{m_k} x,$$

zijn dan de gezochte bijzondere integralen.

In 't algemeen zal hierbij $M_3 = 0$ eene hooge machtsvergelijking zijn van een lageren graad dan den n^{en}. Hare wortels zijn dan minder in aantal dan de orde der beschouwde vergelijking. Met behulp der k gevonden bijzondere integralen kan men nu de orde dier vergelijking met k eenheden verlagen; en ingeval ook de daardoor verkregen vergelijking nog van denzelfden vorm is als de gegevene, kan men daarop klaarblijkelijk toch de gebezigde substitutie niet meer met vrucht toepassen; men past alsdan de methode der bepaalde integralen toe.

Was in het voorgaande geval

$$M_3 = 0$$

van den n^{en} graad, dan zou $M_1 = \lambda M_2$ en dus ook $a_k = = \lambda b_k$ moeten zijn, waarin λ eene standvastige voorstelt; de vergelijking zou in dit geval onmiddellijk door deeling door $\lambda + x$ tot eene met standvastige coëfficienten herleid worden.

89. Heeft men bijv. in bovenstaande vergelijking $n = 2$ en gaat zij dus over in de Spitzersche vergelijking

$$(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0, \quad . \; . \; (37)$$

dan vindt men door de substitutie

$$y = e^{mx}$$

voor M_1 en M_2 de waarden:

$$M_1 = a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0$$

en

$$M_2 = b_2 m^2 + b_1 m + b_0 = 0;$$

en deze beide vergelijkingen zullen minstens één gemeenschappelijken wortel hebben, wanneer voldaan wordt aan de voorwaarde

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}^2;$$

wat derhalve tevens de voorwaarde is, dat de genoemde

vergelijking minstens ééne bijzondere integraal heeft van den vorm $y = e^{mx}$.

Nu kan men in dit geval deze laatste bepalen en op de wijze te werk gaan, zooals boven is aangegeven; men verkrijgt echter zoodoende nog eene vergelijking van de eerste orde op te lossen voor de andere bijzondere integraal; en deze omstandigheid is oorzaak, dat men gemakkelijk onmiddellijk de algemeene integraal kan vinden door

$$y = e^{mx} u$$

te stellen, waarin m evenals boven als standvastig, en u als afhankelijk van x wordt gedacht. Die substitutie geeft hier de gemakkelijk te integreeren vergelijking (Schlömilch, s. 514):

$$u'' + \left(2\,m + \frac{a_1 + b_1 x}{a_2 + b_2 x}\right) u' = 0.$$

90. Wij zien hieruit tevens het groote verschil in karakter van de substituties $y = e^{mx}$ en $y = e^{mx} u$; terwijl toch bij de eerste de waarde van m bepaald wordt uit een of meer hooge machtsvergelijkingen, vereischt de tweede voor de bepaling van u de oplossing eener differentiaal-vergelijking van dezelfde orde als de gegevene; zoodat dan ook de laatste substitutie meer uitsluitend gebezigd wordt om eene differentiaal-vergelijking in een meer geschikten vorm te brengen (§ 98).

91. De Eulersche onderstelling aangaande den vorm der bijzondere integraal kan soms ook met vrucht worden toegepast op niet-lineaire vergelijkingen, wanneer deze tot de homogene vergelijkingen der tweede soort behooren, en wel voornamelijk ingeval x niet als factor in eenigen term der vergelijking voorkomt. Een enkel voorbeeld zal dit nader ophelderen: zij gegeven de vergelijking

$$y' y'' + A_1 y'^2 + A_2 y y' + A_3 y^2 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

dan geeft de substitutie van $y = e^{mx}$ voor de bepaling van m de vergelijking

$$m^3 + A_1 m^2 + A_2 m + A_3 = 0,$$

waaraan door standvastige waarden van m wordt voldaan. Is bijv. de vergelijking

$$y' y'' - 2 y'^2 - yy' + 2 y^2 = 0, \ldots\ldots \quad (50^a)$$

dan wordt de vergelijking in m

$$m^3 - 2 m^2 - m + 2 = 0,$$

en dus $m = 1$, -1 en 2, zoodat men voor de bijzondere integralen vindt:

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x} \quad \text{en} \quad y_3 = e^{2x}.$$

Men kan echter hieruit geen besluit trekken aangaande de algemeene integraal der beschouwde vergelijking, daar deze o. a. ook termen zou kunnen bevatten, die geene willekeurige standvastigen als factor hebben (§ 76). Het gelukt evenwel dikwijls met behulp van de methode van de variatie der standvastigen die algemeene integraal te bepalen. Zoo geeft bijv. de vergelijking

$$yy'' - 2 y'^2 + y^2 = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

voor m de waarden 1 en -1 en dus voor bijzondere integralen

$$y_1 = e^x \quad \text{en} \quad y_2 = e^{-x}.$$

Past men nu de genoemde aanvullings-methode toe (§ 164), dan vindt men voor de gezochte algemeene integraal

$$y = C_1 e^x (1 + C_2 e^{2x})^{-1}.$$

92. Deze toepassing van de Euler'sche vormen is vooral daarom van gewicht, wijl het aantal niet-lineaire vergelijkingen, wier algemeene of bijzondere integralen in een gesloten vorm kunnen worden verkregen, zoo gering is. Slechts enkele methoden leenen zich tot zulk eene integratie. Zoo integreerde men door de methode van de scheiding der veranderlijken eenige eenvoudige bijzondere vergelij-

kingen van de tweede orde, waarvan die van Liouville (§ 36)

$$y'' + Yy'^2 + Xy' = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

de meest algemeene is; van enkele meer ingewikkelde vergelijkingen van hoogere orde werd door dezelfde methode de eerste integraal bepaald (§ 41). Evenzoo integreerde Euler eenige niet-lineaire vergelijkingen der tweede orde door middel van den integreerenden factor (§ 63); — sommige zoodanige vergelijkingen kunnen door de methode van de verhooging der orde worden opgelost (§ 124); — overigens echter is men met de methoden, die de integraal in een gesloten vorm opleveren niet in staat eene niet-lineaire vergelijking onmiddellijk te integreeren. Komt dan ook zulk eene vergelijking, die niet homogeen is, in de werkelijke toepassing voor, dan is men (met uitzondering van de zooeven genoemde gevallen) gedwongen de methoden der reeksen toe te passen; of men moet trachten de gegeven vergelijking door eene geschikte substitutie tot eene lineaire terug te brengen op dezelfde wijze als zulks met de vergelijking van Riccati

$$y' + ay^2 = bx^p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (52)$$

geschiedt (Frenet, Exerc. 411).

β. De bepaalde integralen.

93. Onder de meest vermogende hulpmiddelen, over welke men bij de oplossing van lineaire differentiaal-vergelijkingen van de tweede en hoogere orde kan beschikken, behoort ook dit, dat men de bijzondere integraal aanneemt in den vorm eener bepaalde integraal.

Euler was de eerste, die opmerkte, dat aan eene differentiaal-vergelijking door eene bepaalde integraal kan worden voldaan, en die de theorie dezer laatste aan die der eerste trachtte te verbinden. Op drie verschillende wijzen wilde hij de integraal eener differentiaal-vergelijking door

bepaalde integralen uitdrukken (Euler, Vol. II. Cap. X en XI).

In de eerste plaats neemt hij den vorm der bepaalde integraal aan en leidt daaruit differentiaal-vergelijkingen af, waarvan die integraal eene bijzondere integraal-vergelijking is, of m. a. w. construeert hij differentiaal-vergelijkingen uit bepaalde integralen (§ 25 en vv.).

In de tweede plaats klimt hij van eene differentiaal-vergelijking op tot de bepaalde integraal, die er aan voldoet, door eerst die vergelijking op te lossen in den vorm eener naar de onafhankelijk veranderlijke gerangschikte reeks, en daarna de som dezer reeks door eene bepaalde integraal uit te drukken (§ 78).

Eindelijk leidt hij de bepaalde integraal onmiddellijk uit de differentiaal-vergelijking zelve af (Lacroix Traité du calc. diff. et int. T. III. p. 529).

Die onmiddellijke afleiding der bepaalde integraal uit de vergelijking zelve biedt echter eigenaardige moeilijkheden aan, en om deze te boven te komen moest Euler zich zoovele willekeurige onderstellingen veroorloven en zulke omslachtige berekeningen uitvoeren, dat hij deze wijze van oplossing als bijna onbruikbaar beschouwde en haar verre beneden de afleiding der bepaalde integraal uit de eerst gevonden reeks stelde. De onderzoekingen van latere wiskundigen hebben echter dit ongunstig oordeel over de onmiddellijke afleiding der bepaalde integraal uit de vergelijking zelve, geheel gewijzigd. Het gelukte hun tot die afleiding te geraken met veel minder omslachtigheid in de berekening en door het aannemen van zeer eenvoudige, minder willekeurige onderstellingen; zoodat zij ten laatste de door Euler op den voorgrond geplaatste afleiding uit de eerst bepaalde reeks, hoewel ook hierbij door de meerdere ontwikkeling van de theorie der bepaalde integralen en van die der reeksen velerlei veranderingen in de noodzakelijke berekeningen waren aangebracht, geheel ter zijde stelden en niet meer volgden.

94. Door de methode van oplossing door behulp van bepaalde integralen verstaat men dus thans uitsluitend het onmiddellijk afleiden eener bijzondere integraal-vergelijking in den vorm eener bepaalde integraal uit de differentiaal-vergelijking zelve; en aldus opgevat, heeft deze methode onder de handen van Laplace, Petzval, Weiler, Spitzer en anderen reeds de schoonste uitkomsten opgeleverd. Bij deze methode worden de bijzondere integralen vooropgesteld in den vorm

$$y = \int_{u_1}^{u_2} f(ux)\, du, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XVII)}$$

waarin f eene nog onbepaalde functie is van u en x, en de grenzen der integratie al of niet van x en niet van u afhangen.

Hangen die grenswaarden van x af, dan kan men steeds voor u eene zoodanige nieuwe veranderlijke in de plaats stellen, dat zulks met de nieuwe grenzen niet meer het geval is, waaruit volgt, dat men in de onderstelling van slechts standvastige grenzen hetzelfde doel kan bereiken als door te onderstellen, dat die grenzen van x afhangen (Weiler, Crelle. Bd. LI. S. 105).

95. Als voorbeeld van eene oplossing van lineaire differentiaal-vergelijkingen door middel van bepaalde integralen met standvastige grenzen kiezen wij de reeds door Laplace (Mém. Acad. Paris. 1782. p. 47) op deze wijze behandelde vergelijking

$$(a_n + b_n x)\, y^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} x)\, y^{(n-1)} + \ldots . +$$
$$+ (a_0 + b_0 x)\, y = 0; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

waarbij men voorop stelt, dat de bijzondere integralen den vorm hebben van

$$y = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\, \mathrm{U}\, du, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XVIIa)}$$

waarin U eene nog onbekende functie is van de veranderlijke u der bepaalde integraal, en u_1 en u_2, zooals reeds

is opgemerkt, standvastige doch nog onbekende getallen voorstellen. Door de substitutie dezer waarde van y tracht men alsdan voorwaarden af te leiden, waaruit vooreerst U en vervolgens de grenzen u_1 en u_2 kunnen bepaald worden.

Die substitutie voert namelijk tot de vergelijking

$$\int_{u_1}^{u_2} (U_0 + U_1 x)\, e^{ux}\, U\, du = 0, \quad \ldots\ldots \quad (49^b)$$

waarin

$$U_0 = a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \ldots + a_0$$

en

$$U_1 = b_n u^n + b_{n-1} u^{n-1} + \ldots + b_0$$

is en dus U_0 en U_1 alleen van u afhangen; en nu moet men U, u_1 en u_2 zoodanig bepalen, dat deze laatste vergelijking (49^b) voor elke waarde van x eene identieke wordt. Daartoe herleidt men het laatste deel van de integraal zoodanig, dat x als factor verdwijnt, en wel op deze wijze:

$$\int_{u_1}^{u_2} U_1\, x\, e^{ux}\, U\, du = \int_{u_1}^{u_2} U_1\, U\, d_u\, e^{ux}\, du =$$

$$= e^{ux}\, U_1\, U\Big]_{u_1}^{u_2} - \int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\, d_u\, (U_1\, U)\, du,$$

waardoor de genoemde vergelijking (49^b) overgaat in de volgende

$$e^{ux}\, U_1\, U\Big]_{u_1}^{u_2} + \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} \left\{U_0\, U - d_u\, (U_1\, U)\right\} du = 0 \quad \ldots \quad (49^c)$$

Op deze herleiding steunt de geheele methode, want klaarblijkelijk moet nu ook aan de vergelijking (49^c) voor alle waarden van x identiek worden voldaan; men moet dus U als eene functie van u, en nog u_1 en u_2 zoo kiezen, dat dit plaats heeft; en dit zal het geval zijn, wanneer men U zoodanig neemt, dat

$$U_0\, U - d_u\, (U_1\, U) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49^d)$$

wordt en men voorts voor u_1 en u_2 zulke standvastige getallen neemt, dat ook

$$e^{ux}\, U_1\, U\Big]_{u_1}^{u_2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49\ )$$

wordt.

Hierbij zou men de bedenking kunnen maken, dat aan de vergelijking (49c) reeds voor elke waarde van x identiek kon worden voldaan, doordat de tweede term dier vergelijking na werkelijke integratie gelijk werd aan den eersten term op het teeken na. Die bedenking vervalt echter door de opmerking, dat de integraal van dien term alsdan van den vorm $e^{ux}U_3$ behoorde te zijn, waarin U_3 eene functie van u alleen voorstelt; en dat dus die integraal $\int e^{ux}(xU_3 + d_u U_3)\,du$ zou moeten zijn, en bijgevolg nog een lid zou moeten bevatten met den factor x voorzien. Daar dit lid ontbreekt, kan de integraal van den tweeden term niet van den vorm $e^{ux}U_3$ zijn en dus den eersten term niet opheffen.

Uit (49d) volgt nu onmiddellijk

$$\frac{d_u(U_1 U)}{U_1 U} - \frac{U_0}{U_1} = 0,$$

of na integratie

$$U = \frac{1}{U_1} e^{\int \frac{U_0}{U_1} du}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (49^f)$$

waardoor U in u is uitgedrukt.

Substitüeert men deze waarde van U in de vergelijking (49e) dan gaat deze over in

$$e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du}\Big]_{u_1}^{u_2} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (49^g)$$

waaruit nu de waarden van u_1 en u_2 moeten bepaald worden. Stelt men voorts door $p_1, p_2, \ldots\ldots q_1, q_2, \ldots\ldots$ de slechts eenmaal en door $r_1, r_2, \ldots\ldots$ de meermalen (m_1, $m_2, \ldots\ldots$ maal) voorkomende wortels van

$$U_1 = 0$$

voor, dan zal deze laatste uitdrukking (49g) na ontbinding in gedeeltelijke breuken en integratie overgaan in de volgende

$$\left. \frac{(u-p_1)^{\alpha_1}\,(u-p_2)^{\alpha_2}\,\ldots\ldots}{(u-q_1)^{\beta_1}\,(u-q_2)^{\beta_2}\,\ldots\ldots}\, e^{ux} + U_2 + \frac{\gamma_1}{(u-r_1)^{m_1-1}} + \ldots \right]_{u_1}^{u_2} = 0, \quad (49h)$$

waarin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \beta_1, \beta_2, \ldots\ldots \gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots$ de standvastige tellers der genoemde gedeeltelijke breuken voorstellen, zoodanig gekozen, dat zij òf positief zijn òf ook complexe met positieve reëele bestanddeelen.

96. Aan deze laatste vergelijking wordt vooreerst voldaan door de waarden

$$u = p_1, u = p_2, \ldots\ldots$$

en ten tweede door de wortels der vergelijking

$$U_2 = -\infty.$$

Deze hierdoor verkregen waarden van u kan men voor de grenzen u_1 en u_2 nemen; en het hangt nu geheel en al van het aantal dezer waarden af, of men de algemeene integraal of slechts eene bijzondere integraal der differentiaal-vergelijking zal gevonden hebben. Vindt men meer dan $n+1$ waarden, dan zal men tusschen de standvastigen één of meer betrekkingen moeten opsporen, ten einde slechts n onderling onafhankelijke standvastigen over te houden. Bedraagt het aantal standvastigen minder dan n, bijv. $k+1$, wat in de werkelijke toepassing meestal het geval zal zijn, dan heeft men slechts k bijzondere integralen gevonden en kan men dus de orde der vergelijking slechts met k eenheden verlagen; men moet in dat geval naar andere hulpmiddelen uitzien om de integraal aan te vullen. Het juiste getal van $n+1$ waarden, tusschen welke n afstanden voorkomen, die zich als grenzen der integratie laten gebruiken, zal men slechts zeer zelden vinden: verschillende omstandigheden werken samen om dat aantal te verkleinen:

vooreerst kunnen er namelijk onder de bijzondere integralen, die men verkregen heeft, zijn die

1°. onderling niet verschillen; en alsdan geven de aan-

vullings-methoden de middelen aan de hand om de integraal aan te vullen;

2°. identiek gelijk nul zijn;

3°. onder onbruikbare vormen voorkomen, wat bijv. het geval is, wanneer de functie onder het integraal-teeken binnen de grenzen der integratie ondoorloopend en oneindig groot wordt; hetgeen o. a. steeds plaats heeft bij de bijzondere integraal, die p_1 en p_2 tot grenzen heeft, wanneer q_1 of q_2 in grootte tusschen p_1 en p_2 valt; —

voorts kan het aantal waarden verkleind worden, doordat

$$U_1 = 0,$$

gelijke wortels heeft, of doordat de tellers der gedeeltelijke breuken, waarin $\frac{U_0}{U_1}$ kan ontbonden worden, negatief of ook complex zijn met negatieve reëele bestanddeelen, of ook doordien U_0 en U_1 een gemeenschappelijken factor bezitten.

Dit laatste zal steeds het geval zijn, wanneer

$$y = e^{mx}$$

als eene bijzondere integraal aan de vergelijking voldoet; zooals uit de overeenkomst van de vergelijkingen (49^a) en (49^b) blijkt, daar hierin M_1 en U_0 en M_2 en U_1 dezelfde beteekenis hebben. In dit laatste geval kunnen de vormen $y = e^{mx}$ en (XVII^a) gezamenlijk tot de algemeene integraal voeren.

97. Na het hier aangevoerde zal het geene verwondering meer kunnen baren, dat men er niet in geslaagd is de als voorbeeld gekozen vergelijking van Laplace op deze wijze algemeen geldend te integreeren; zelfs voor het geval dat $n = 3$ is, heeft men al de bezwaren aan die algemeene integratie verbonden niet kunnen wegruimen (Spitzer, 2e Forts. 6er Abschnitt). Het is dan ook eene verregaande dwaling van enkele wiskundigen, te denken, dat men op de zooeven beschreven wijze de lineaire vergelijking

$$y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + X_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots X_1 y' + X_0 y = 0, \quad \ldots (53)$$

voor het geval dat X_k eene geheele rationeele algebraïsche functie van x voorstelt, steeds algemeen kan integreeren [32]. Het gevolg van al de pogingen om door de methode van de bepaalde integralen tot die algemeene integratie te komen, zal slechts kunnen zijn, dat men in bijna alle gevallen tot minstens ééne bijzondere integraal, en in het gunstigste geval tot de algemeene integraal der gegeven differentiaal-vergelijking geraakt.

Zoo geeft bijv. de eenvoudige vergelijking (Kapteijn, bl. 126)

$$y^{(n)} + \frac{A}{x} y^{(n-1)} + A_0 y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

de waarden

$$U_0 = A u^{n-1}$$

en

$$U_1 = u^n + A_0,$$

zoodat men voor de bepaling van U komt tot de vergelijking

$$U = \frac{1}{u^n + A_0} e^{A \int \frac{u^{n-1}}{u^n + A_0} du},$$

[32]) Petzval, Bd. I. S. 104. — Is k hierbij de exponent van de hoogste macht van x, dan stelt men de bijzondere integraal vast in den vorm

$$y = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux^k} U\, du \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (XVII^b)$$

en verkrijgt dan voor (49^d) eene differentiaal-vergelijking der k^e orde, die veelal niet geïntegreerd kan worden.

Theoretisch kan wel is waar door deze methode de integratie der vergelijking

$$\sum_1^n (a_k + b_k x + \ldots.. l_k x^k) y^{(k)} = 0$$

steeds tot die van eene analoge van de $(n-1)^e$ orde worden teruggebracht, en kan men zoodoende tot eene vergelijking van de eerste orde opklimmen; maar in de practijk ontmoet zulks zoovele en zulke onoverkomelijke bezwaren (Zie Raabe, S. 288) dat van eene zoodanige integratie slechts eene in enkele bijzondere gevallen geldende uitkomst valt te verwachten, zelfs dàn wanneer de vergelijking niet hooger dan tot de derde orde opklimt.

waaruit men vindt

$$U = (u^n + A_0)^{\frac{A}{n} - 1}.$$

De grenzen der integraal moeten hierbij bepaald worden uit de vergelijking

$$e^{ux}(u^n + A_0)^{\frac{A}{n}} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (54^a)$$

welke alleen onder de gunstigste omstandigheden ($A > 0$) $n + 1$ waarden voor u, en dus ook n bijzondere integralen oplevert.

98. De beschouwde methode ontleent echter haar hoog gewicht voor de wetenschap aan hare toepassing op de lineaire vergelijkingen der tweede orde en op de binomische differentiaal-vergelijkingen.

De herleide lineaire vergelijking der tweede orde

$$y'' + X_1 y' + X_0 y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

kan in dezen algemeenen vorm door geene enkele integratie-methode met vrucht behandeld worden; zij wordt eerst geschikt voor zulk eene behandeling, wanneer X_1 en X_0 bekende functiën zijn van x. Vallen alsdan deze functiën niet in de beide in § 54 vermelde vormen, dan tracht men meestal die vergelijking door de methode der bepaalde integralen te integreeren. De vorm dier bepaalde integralen zal daarbij geheel en al afhangen van den bijzonderen vorm der functiën X_1 en X_0; en dit is de voornaamste reden, waarom men de vergelijking zelve gewoonlijk eerst aan zoodanige herleidingen onderwerpt, dat men eene differentiaal-vergelijking verkrijgt, waarbij de betreffende onderzoekingen zich zooveel mogelijk vereenvoudigen. Die herleidingen zijn in de hoofdzaak tweeërlei:

òf men vervangt de afhankelijk veranderlijke y door eene nieuwe y_1, aan welke zij verbonden is door de betrekking

$$y = X y_1.$$

Door deze in de vergelijking (4) te substitueeren verkrijgt men

$$y_1'' + \left(2\frac{d_x X}{X} + X_1\right) y_1' + \left(\frac{d_x^2 X}{X} + X_1 \frac{d_x X}{X} + X_0\right) y_1 = 0,$$

waarin nu X zoodanig moet gekozen worden, dat de differentiaal-vergelijking werkelijk eenvoudiger wordt;

óf men voert in de plaats van de onafhankelijk veranderlijke x eene nieuwe x_1 in, die eene functie is der eerste, zoodat men heeft

$$x_1 = f(x),$$

en verkrijgt hierdoor voor de vergelijking (4) de nieuwe vergelijking

$$[f'(x)]^2 \frac{d^2 y}{dx_1^2} + [f''(x) + X_1 f'(x)] \frac{dy}{dx_1} + X_0 y = 0,$$

waarin de verdere eliminatie van x door x_1 moet worden uitgevoerd (Weiler, Crelle. Bd. LI. S. 116).

In de meeste gevallen beoogt men door deze herleidingen den veranderlijken factor van y in eenen standvastigen te veranderen en daartoe bedient men zich dan van de eerst aangewezen herleiding in een der vormen

$$y = x^p y_1$$

of

$$y = e^{rx^p} y_1,$$

welke bijna steeds tot de gewenschte uitkomst voeren.

99. De voorgaande herleidingen zijn van zulk een gewicht bij de toepassing der methode, dat zij als een wezenlijk deel derzelve moeten worden beschouwd. Is eenmaal de vergelijking in een geschikten vorm gebracht, dan loopt de integratie verder gewoonlijk gemakkelijk af. Zoo kan bijv. de Spitzersche vergelijking

$$(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0 \quad . \; . \; . \; (37)$$

voor alle eindige en nul-waarden van a_k en b_k worden gebracht in den normaal-vorm

$$xy'' + (p + q + x) y' + py = 0, \quad \ldots\ldots \quad (37^d)$$

waarin p en q alle mogelijke eindige of nul-waarden kunnen hebbeu.

Uit deze nieuwe differentiaal-vergelijking kan men nu eene menigte eigenschappen afleiden (§ 142), waardoor men in staat gesteld wordt de vergelijking verder zoodanig te herleiden, dat p en q positieve gebruikelijke (echte) breuken voorstellen. Deze eigenschappen verbonden met de integralen der vergelijking voor

$$p = 0 \quad \text{of} \quad q = 0,$$

voeren tot den vorm der bijzondere integralen der vergelijking (37^d) en leeren aldus in alle gevallen de algemeene integraal der eerstgenoemde vergelijking bepalen (Schlömilch, S. 513).

100. Van alle bijzondere onderzoekingen op het gebied van de integratie der differentiaal-vergelijkingen heeft geene enkele zulk eene groote practische waarde als juist deze integratie der Spitzersche vergelijking door de methode der bepaalde integralen. Wel is waar is die vergelijking herleid (homogeen) en bovendien slechts van de tweede orde, en mist zij dus het voornaamste kenmerk van algemeenheid; maar dit gemis wordt grootendeels vergoed door de vele andere vergelijkingen, die men tot dezelve kan terugbrengen, zooals bijv. de vergelijking (Spitzer, 1e Forts. S. 2)

$$x^p y'' + b_1 x^{p-1} y' + (a_0 + b_0 x^{p-2}) y = 0, \quad \ldots \quad (55)$$

door $x^{p-2} = x_1^{-1}$ en vervolgens $y = x_1^k z$ te stellen;

de vergelijking (l. c. S. 53)

$$y'' + ax^{p+1} y' + bx^p y = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

door de substitutie van $x^{p+2} = x_1$;

de vergelijking (l. c. S. 10)

$$(x - a_2)^2 y'' + (a_1 + b_1 x) y' + a_0 y = 0, \quad \ldots \quad (57)$$

door te stellen $x - a_2 = x_1^{-1}$ en $y = x_1^k z$;

de vergelijking [33])

$$a_2 y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2) y = 0, \quad . \; . \; . \quad (58)$$

door de substitutie van $y = e^{\alpha x^2 + \beta x} z$;

de vergelijking (Spitzer, 1e Forts. S. 52)

$$a_2 x^2 y'' + x (a_1 + b_1 lx) y' + (a_0 + b_0 lx + c_0 (lx)^2) y = 0, \quad (59)$$

door te stellen $x = e^{x_1}$; enz.

Deze vergelijkingen kunnen dus ook onder alle omstandigheden volledig geïntegreerd worden.

101. Nergens komt dan ook de methode van de bepaalde integralen zoo schoon uit als bij de toepassing op deze Spitzersche vergelijking; zij levert hier iets volledigs en kan in dit opzicht met de methode van den integreerenden factor op eene lijn geplaatst worden. Vergelijkt men echter de bovenvermelde integratie met die van de lineaire vergelijkingen met standvastige coëfficienten volgens de laatstgenoemde methode, dan ziet men, dat zij niets anders gemeen hebben, dan juist deze volledigheid van analyse [34]), of het mocht zijn de omslachtigheid der bewerkingen, die bij beide methoden moeten verricht worden om die volledigheid te bereiken.

De methode van den integreerenden factor bepaalt zelve den vorm der bijzondere integraal, bij die der bepaalde integralen wordt deze vooraf vastgesteld; de eerste gaat rechtstreeks op het doel af, houdt zich alleen met de te integreeren vergelijking bezig en levert ons dan de integraal in een zuiver gesloten vorm, bijv.

$$y = \sum_1^n C_k e^{m_k x};$$

---

[33]) Liouville, Éc. Polyt. T. XIII. Cah. XXI. 1832. Is hierbij $b_1^2 = 4a_2 c_0$, dan substitueert men $y = e^{\alpha x^2} z$. Spitzer, 1e Forts. S. 51.

[34]) Hoewel voor het geval dat in (37d) $p + q - 1 = 0$ is, door andere methoden de integraal moet worden aangevuld, meenen wij hier toch van eene volledige analyse te moeten spreken. Zie § 30.

terwijl bij de laatste de te integreeren (Spitzersche) vergelijking eerst door herleidingen voor de behandeling wordt geschikt gemaakt, welke herleidingen naar gelang van de bijzondere waarden der coëfficienten verschillen; waarna zij, door eigenschappen en analogiën geleid, de integraal oplevert in den vorm eener bepaalde integraal

$$y = C_1 \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} e^{-ux} du +$$
$$+ C_2 x^{1-p-q} \int_0^1 u^{-q} (1-u)^{-p} e^{-ux} du, \quad . \ . \ . \ (37^e)$$

die alleen geldt voor de vergelijking in den normaalvorm (37^d), wanneer p en q positieve gebruikelijke breuken voorstellen, en die bovendien voor $p+q-1=0$ eene kleine wijziging moet ondergaan om niet in eene bijzondere integraal te vervallen.

In theoretische waarde en eenvoud van uitkomst kan dan ook de integratie der Spitzersche vergelijking in geenen deele wedijveren met die der algemeene lineaire vergelijking met standvastige coëfficienten door de methode van den integreerenden factor; in practische waarde staat zij echter veel hooger, — daar de integratie dezer laatste vergelijking reeds sedert lang langs andere wegen was verkregen — hoewel de integratie door den integreerenden factor eene in alle opzichten algemeene vergelijking beoogt, terwijl de Spitzersche vergelijking slechts als eene betrekkelijk algemeene kan worden aangemerkt.

102. De toepassing van de methode der bepaalde integralen op de lineaire vergelijkingen der tweede orde bepaalt zich tot hiertoe voornamelijk tot de integratie van de bovengenoemde Spitzersche vergelijking en van die van Liouville (Raabe, S. 280)

$$(a_2 + b_2 x + c_2 x^2) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + a_0 y = 0, \quad . \ . \ . \ (60)$$

waartoe o. a. de vergelijking van Euler (Vol. II. Cap. XI. p. 264)

$$x^2 (a_2 + b_2 x^p) y'' + x (a_1 + b_1 x^p) y' + (a_0 + b_0 x^p) y = 0, \quad (61)$$

door de substitutie van $x^p = x_1$ en $y = x_1^k z$, en de vergelijking (Weiler, Crelle. Bd. LI. S. 123)

$$x^2 (x + a_2)^2 y'' + x (x + a_2) (a_1 + b_1 x) y' + \\ + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2) y = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (62)$$

kunnen worden teruggebracht.

103. Heeft men eene differentiaal-vergelijking, die als een bijzonder geval der Spitzersche en Liouvillesche kan worden beschouwd, dan kan haar algemeene integraal uit die van deze worden afgeleid; in de toepassing doet men dit echter zelden, vooral wanneer de vergelijking zeer eenvoudige coëfficienten heeft, omdat de herleiding der vergelijking tot den normaalvorm (37[d]) meestal meer werk vereischt, dan de rechtstreeksche toepassing der methode. Gewoonlijk past men daarom onmiddellijk de methode toe, na al of niet de vergelijking tot een meer geschikten vorm te hebben gebracht.

Zij bijv. de vergelijking

$$xy'' + A_1 y' + A_0 xy = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (47)$$

waarin wij aan A_1 eene positieve waarde toekennen, en stelt men hierin voor de bijzondere integraal

$$y = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} \, U du,$$

dan verkrijgt men voor U_0 en U_1 de waarden

$$U_0 = A_1 u$$

en

$$U_1 = u^2 + A_0,$$

en dus voor de bepaling van U, u_1 en u_2 de vergelijkingen

$$U = \frac{1}{u^2 + A_0} e^{\int \frac{A_1 u}{u^2 + A_0} du},$$

en

$$e^{ux + \int \frac{A_1 u}{u^2 + A_0} du} = 0.$$

Uit de eerste volgt

$$U = (u^2 + A_0)^{\frac{A_1}{2} - 1},$$

waardoor de tweede overgaat in

$$e^{ux}(u^2 + A_0)^{\frac{A_1}{2}} = 0,$$

en hieraan wordt voldaan, behalve door

$$u = \pm \sqrt{-A_0},$$

voor positieve x door

$$u = -\infty$$

en voor negatieve x door

$$u = +\infty;$$

zoodat men in het eerste geval voor de algemeene integraal vindt

$$y = C_1 \int_{-\sqrt{-A_0}}^{+\sqrt{-A_0}} e^{ux}(u^2 + A_0)^{\frac{A_1}{2} - 1} du +$$

$$+ C_2 \int_{-\infty}^{-\sqrt{-A_0}} e^{ux}(u^2 + A_0)^{\frac{A_1}{2} - 1} du \quad \ldots\ldots (47a)$$

Beide bijzondere integralen gelden voor $A_1 > 0$ geheel algemeen [35]) voor elke positieve waarde van x.

Voor $A_1 = 2$ gaat deze algemeene integraal over in

$$y = C_1 \frac{e^{x\sqrt{-A_0}}}{x} + (C_2 - C_1) \frac{e^{-x\sqrt{-A_0}}}{x} - C_2 \frac{e^{-\infty x}}{x},$$

of wat hetzelfde is in

$$y = C_1 \frac{e^{x\sqrt{-A_0}}}{x} + C_2 \frac{e^{-x\sqrt{-A_0}}}{x}.$$

---

[35]) Zie Mayr, S. 97; Mayr beschouwt echter deze integraal als algemeen geldig, dus ook voor $A_1 < 0$; deze dwaling vloeit voort uit zijne bepaling van u_1 en u_2 uit

$$e^{ux}(u^2 + A_0)\,U = 0,$$

zonder daarbij de waarde van U in het oog te houden.

De waarde

$$y = C_2 \frac{e^{-\infty x}}{x} = 0$$

kan hierbij als eene bijzondere oplossing worden beschouwd.

Wil men echter de van de waarden van x afhankelijke grenzen $+\infty$ en $-\infty$ geheel buiten rekening laten, dan kan, zooals de bewerking van zelve aanwijst, de tweede bijzondere integraal niet onmiddellijk door dezelfde methode verkregen worden. Men kan alsdan van eene der aanvullings-methoden gebruik maken; liever gaat men echter aldus te werk: eerst herleidt men de gegeven vergelijking door te stellen $y = x^p z$, waarin de waarde van p onbepaald is gelaten, om haar na de substitutie zoodanig te kunnen kiezen, dat de komende vergelijking denzelfden vorm verkrijgt als de oorspronkelijke. Door die substitutie verkrijgt men, na deeling door x^{p-2},

$$x^2 z'' + (2p + A_1) xz' + [p(p-1) + A_1 p + A_0 x^2] z = 0,$$

zoodat men dit doel bereikt door p te binden aan de voorwaarden

$$2p + A_1 > 0 \quad \text{en} \quad \gtrless A_1$$

en $$p(p-1) + A_1 p = 0.$$

Hieruit vindt men voor p

$$p = 1 - A_1,$$

waardoor de verkregen vergelijking overgaat in

$$xz'' + (2 - A_1) z' + A_0 xz = 0 \quad \ldots\ldots \quad (47^b)$$

Is nu hierin $A_1 < 2$, dan heeft deze vergelijking in analogie met de oorspronkelijke tot bijzondere integraal

$$z = C_2 \int_{-\sqrt{-A_0}}^{\sqrt{-A_0}} e^{ux} (u^2 + A_0)^{\frac{-A_1}{2}} du, \quad \ldots\ldots \quad (47^c)$$

zoodat men voor de gezochte tweede bijzondere integraal vindt

$$y_2 = C_2 x^{1-A_1} \int_{-\sqrt{-A_0}}^{\sqrt{-A_0}} e^{ux} (u^2 + A_0)^{\frac{-A_1}{2}} du \quad . \; . \; . \quad (47^d)$$

Deze geeft met de eerste

$$y_1 = C_1 \int_{-\sqrt{-A_0}}^{\sqrt{-A_0}} e^{ux} (u^2 + A_0)^{\frac{A_1}{2} - 1} du \quad . \; . \; . \; . \quad (47^e)$$

verbonden de algemeene integraal, die nu echter alleen geldt voor

$$0 < A_1 < 2,$$

en ook voor $A_1 = 1$ door eene der aanvullings-methoden moet worden aangevuld.

Valt nu A_1 op of buiten deze grenzen, dan kan men ook van deze aanvullings-methoden gebruik maken; of men kan den weg volgen, die door Spitzer werd voorgeschreven en op verschillende vergelijkingen toegepast, en waarbij de gegeven vergelijking uit eene andere

$$x Z'' + 2\alpha Z' + A_0 x Z = 0$$

voor $0 < \alpha < 1$ door achtereenvolgende differentiaties en substituties wordt geconstrueerd; — hierop komen wij later terug (§ 133) — of eindelijk kan men van de methode van den integreerenden factor gebruik maken. Voor de integreerende vergelijkingen van (47) en (47^b) vindt men namelijk

$$x\Phi'' + (2 - A_1)\Phi' + A_0 x\Phi = 0$$

en

$$x\Phi'' + A_1 \Phi' + A_0 x\Phi = 0,$$

dus juist de vergelijkingen (47^b) en (47), zoodat de gevonden bijzondere integraal (47^c) een integreerende factor is van de vergelijking (47^e). Is nu $A_1 > 2$, dan integreere men de vergelijking (47^b) door behulp van den integreerenden factor (47^e); en is $A_1 < 0$, dan kan zulks met de oorspronkelijke vergelijking zelve geschieden door middel van (47^c).

In dit laatste geval verkrijgt men voor den integreerenden factor

$$\Phi = \int_{-\sqrt{-A_0}}^{\sqrt{-A_0}} e^{ux} (u^2 + A_0)^{\frac{A_1}{2}} du,$$

en hieruit terstond voor de eerste integraal der vergelijking

$$xy'' - A_1 y' + A_0 xy = 0$$

de lineaire vergelijking der eerste orde

$$y' x \int_{-\sqrt{-A_0}}^{\sqrt{-A_0}} e^{ux} (u^2 + A_0)^{\frac{A_1}{2}} du - y \Big[(A_1 + 1) \int_{-\sqrt{-A_0}}^{\sqrt{-A_0}} e^{ux} (u^2 + A_0)^{\frac{A_1}{2}} du +$$

$$+ x \int_{-\sqrt{-A_0}}^{\sqrt{-A_0}} u e^{ux} (u^2 + A_0)^{\frac{A_1}{2}} du \Big] = C_1,$$

die verder gemakkelijk in quadraturen kan worden opgelost.

Is nu hierin A_1 even, dan kan de waarde der bepaalde integralen in een eindigen vorm worden uitgedrukt, zoodat alsdan de oplossing vereenvoudigd wordt. Is bijv. $A_1 = 4$ en $A_0 = -1$ en dus de vergelijking

$$xy'' - 4y' - xy = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

dan wordt

$$\Phi = \int_{-1}^{+1} e^{ux} (u^2 - 1)^2 du,$$

of na ontwikkeling

$$\Phi = \frac{8}{x^5} [e^x (x^2 - 3x + 3) - e^{-x} (x^2 + 3x + 3)].$$

Voor de eerste integraal vindt men alsdan na herleiding

$$xy' [e^x (x^2 - 3x + 3) - e^{-x} (x^2 + 3x + 3)] -$$
$$- y [3 e^x (x - 1)^2 - e^{-x} (x^2 - 3)] - C_1 x^5 = 0,$$

waaruit de algemeene integraal gevonden wordt door toepassing der formule

$$y = e^{-\int X_1 dx} [C_2 - \int X_0 e^{\int X_1 dx} dx].$$

Hoewel hierbij de algemeene integraal der vergelijking niet in zulk een eenvoudigen vorm voorkomt als bij het volgen van den bovengenoemden door Spitzer voorgeschreven weg, is toch deze afleiding van gewicht, daar zij ons doet zien, hoe de methode van den integreerenden factor er toe kan bijdragen om de bezwaren te helpen overwinnen, die somtijds de toepassing van de methode van de bepaalde integralen in den weg staan. In § 51 hebben wij trouwens reeds aangewezen, van hoeveel belang de aanwending van de methode van den integreerenden factor kan zijn bij de werkelijke toepassing van de methode, welke wij thans beschouwen, wijl daardoor het aantal bijzondere gevallen, in welke de Spitzersche vergelijking langs een veel eenvoudigeren weg kan worden geïntegreerd, bijna verdubbeld wordt.

104. De algemeene integraal, die wij boven voor

$$0 < A_1 < 2$$

vonden, kan gebracht worden in den vorm

$$y = C_1 \int_0^{\pi} Cos\,(x\sqrt{A_0}\,.\,Cos\,u)\,Sin^{A_1-1}u\,du +$$

$$+ C_2\,x^{1-A_1} \int_0^{\pi} Cos\,(x\sqrt{A_0}\,.\,Cos\,u)\,Sin^{1-A_1}u\,du, \ldots \quad (64)$$

en in dezen vorm wordt zij ook verkregen, wanneer men haar afleidt uit de reeksen, die de toepassing van de methode der onbepaalde coëfficienten oplevert (§ 78).

Aan deze afleiding der bepaalde integralen uit de eerst gevormde reeksen werd, zooals wij vroeger reeds opmerkten, door Euler de voorkeur gegeven boven de onmiddellijke afleiding uit de differentiaal-vergelijking zelve, wijl hij in deze laatste slechts kon slagen door zeer omslachtige berekeningen, die bovendien steunden op al te veel willekeurige onderstellingen. Door de bemoeiingen van latere wiskundigen is echter die onmiddellijke afleiding zoozeer van phase veranderd, dat men thans geen grond meer vindt om den anderen weg in te slaan. Behalve dat

de voorafgaande bepaling der reeksen reeds als een omweg moet worden beschouwd en dat de sommatie dezer reeksen geheel en al afhangt van de omstandigheid of er integralen bekend zijn, tusschen welke dezelfde of analoge verhoudingen bestaan als tusschen twee opeenvolgende termen dier reeksen, staat die afleiding bij de onmiddellijke verre achter in sierlijkheid en kortheid van bewerking, volledigheid der analyse en vooral ook in algemeenheid van toepassing. Geene enkele differentiaal-vergelijking, die ook maar in eenig opzicht met die van Spitzer of Liouville in algemeenheid kan wedijveren, is ooit door de methode der reeksen in gesloten vorm geïntegreerd geworden. Zelfs bij de toepassing op de binomische vergelijkingen

$$y^{(n)} = A\, x^p\, y, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

die van alle differentiaal-vergelijkingen voor de aanwending der reeksen den meest geschikten vorm hebben, is de onmiddellijke afleiding door de methode der bepaalde integralen verre te verkiezen boven de afleiding uit de reeksen. Alleen als bij uitzondering gelukt dan ook de gesloten integratie van zulk eene vergelijking door de methode der reeksen, terwijl door de onmiddellijke afleiding voor p een positief geheel getal, of voor $n = 2$ (de vergelijking van Riccati), enz. volledige integralen zijn verkregen.

105. Bij de beschouwing van de methoden der reeksen hebben wij gezien (§ 75 en vv.), hoe voorzichtig men moet zijn met de uitkomsten, die deze methoden opleveren. Steeds moet de convergentie dier reeksen worden onderzocht en de onbruikbare worden verworpen; bij de toepassing van de methode der bepaalde integralen heeft men op eene overeenkomstige omstandigheid te letten (§ 96) en het is, hoewel gemakkelijk te verklaren, toch merkwaardig, dat in den regel de laatste ondoorloopende integralen geeft, waar de eerste tot divergeerende reeksen voeren, — waar

bij de laatste de bijzondere integralen in eene enkele overgaan, heeft dit ook bij de eerste plaats, — en voor de waarden, waarbij de laatste eene algemeen bruikbare uitkomst geeft, is dit ook bij de eerste het geval. Voor de eenvoudige vergelijking

$$xy'' + A_1 y' + A_0 xy = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (47)$$

heeft men zulks boven reeds kunnen opmerken, maar zelfs bij de algemeene vergelijking van Liouville

$$(x-\alpha)(x-\beta)y'' - [(B+p-1)(x-\alpha)+(A+p-1)(x-\beta)]y' + \\ + p(A+B+p-1)y = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (60^a)$$

neemt men die overeenstemming waar; zie Spitzer, 1e Forts. § 24—37.

Bij de methode der bepaalde integralen kan men echter de oorzaken van het niet gelden der integraal, zooals het voorkomen van logarithmische bestanddeelen, enz. veel gemakkelijker uit den weg ruimen dan bij die der reeksen: de vorm van de uitkomst is daartoe meer geschikt. Dit laatste neemt echter niet weg, dat bij geene enkele methode van deze derde soort de bepaling van de onbepaalde standvastige grootheden, die de vastgestelde functie bevat, zooveel moeite kost als bij die der bepaalde integralen.

Behalve bij de toepassing op de lineaire vergelijkingen met standvastige coëfficienten, waarbij deze methode met die der Eulersche vormen overeenstemt, vereischt die bepaling de oplossing eener met de gegevene overeenkomstige differentiaal-vergelijking, wier orde niet van de orde der gegevene, maar alleen van den graad der veranderlijke coëfficienten afhangt. Van daar dan ook, dat geene enkele dier methoden in het algemeen zooveel arbeid vereischt als juist deze. Die arbeid is natuurlijk het minst, wanneer de coëfficienten der vergelijking de veranderlijke x slechts in de eerste macht bevatten; wil men echter in dit geval tot eene zoo volledig mogelijke integratie geraken, dan maken de herleidingen, die men behoeft, de op-

lossing eenigszins omslachtig. Bovendien moeten de grenzen uit eene algebraïsche vergelijking van hoogeren graad worden bepaald en dan nog komt het voor, dat de verkregen uitkomst meer dan het vereischte aantal willekeurige standvastigen bevat, en dus nog de substitutie in de gegeven vergelijking de noodzakelijke betrekkingen tusschen die standvastigen moet opleveren.

106. Strikt genomen zou alleen dan de hoeveelheid arbeid, dien de integratie-methoden vereischen, kunnen vergeleken worden, wanneer verscheidene algemeene differentiaal-vergelijkingen door verschillende methoden onder dezelfde omstandigheden konden worden geïntegreerd. Dit is echter slechts voor een paar methoden met enkele vergelijkingen het geval.

Zoo kan de vergelijking

$$(a_2 + b_2 x + c_2 x^2) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + a_0 y = 0 \quad . \; . \; . \; (60)$$

door de methode van Liouville en door die der bepaalde integralen worden opgelost (Liouville, Éc. Polyt. T. XIII. Cah. XXI. 1832; Raabe, S. 280; Spitzer, 1e Forts. 3er Abschnitt; enz.); en, indien men alleen den arbeid beschouwt, welken beide methoden daarbij vereischen, dan valt de vergelijking geheel en al uit ter gunste van de methode van Liouville — wel een bewijs, dat de te verrichten arbeid weinig kan beslissen aangaande de waarde eener methode. — Evenzoo kan de algemeene integraal der Spitzersche vergelijking door symbolen of door differentiaalquotienten met willekeurige indices worden voorgesteld, waartoe veel minder arbeid vereischt wordt, dan voor de algemeene, volledige integratie door de methode der bepaalde integralen: wat geeft echter hierbij de geringe arbeid, wanneer hij eene onbruikbare uitkomst oplevert!

Geene vergelijking werd door zoo vele verschillende methoden en op zoo verschillende wijzen geïntegreerd als de vergelijking

$$y'' + \left[A_0 - \frac{a(a-1)}{x^2}\right] y = 0, \quad \ldots\ldots (65)$$

en de door de substitutie van $y = x^a z$ hieruit afgeleide

$$xy'' + 2a\,y' + A_0\,xy = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (47^i)$$

(Poisson, Éc. Polyt. T. XII. Cah. XIX. 1823; Serret, Comptes rendus, 1843; Kelland, Edinburgh Transact. 1853; Cournot. p. 249; enz. enz.); maar ten aanzien van den arbeid, dien deze methoden vereischen, kan men uit die verschillende oplossingen slechts vage gevolgtrekkingen maken, daar de verkregen uitkomst niet bij alle dezelfde geldigheid bezit, zij op een veel te gering aantal voorbeelden zouden steunen, en bovendien genoemde vergelijkingen meer geschikt zijn om door de eene methode dan door de andere te worden geïntegreerd.

In 't algemeen kan men echter zeggen met het oog op de integratie-methoden, die de integraal in een gesloten vorm opleveren: hoe algemeener eene methode kan worden toegepast en hoe vollediger analyse men daarbij verkrijgt, hoe meer werk zij vereischt.

b. DE METHODEN DER SYMBOLEN.

107. Elke differentiaal-vergelijking kan beschouwd worden als de uitkomst van eene zekere bewerking, uitgevoerd op eene functie, die de eerste integraal is van die vergelijking; deze eerste integraal weder als het resultaat van eene gelijksoortige bewerking volbracht op eene functie, die dan de tweede integraal is van de oorspronkelijke differentiaal-vergelijking; deze tweede integraal weder als het resultaat van zulk eene bewerking, verricht op de derde integraal, enz. Aldus beschouwd verschijnt die differentiaal-vergelijking als de eind-uitkomst van eene reeks van gelijksoortige bewerkingen, achtereenvolgens uitgevoerd op de primitieve functie, die als de algemeene integraal

dier vergelijking wordt aangemerkt. Was men dus in staat om op de gegeven differentiaal-vergelijking de omgekeerde bewerkingen in omgekeerde volgorde toe te passen, dan zou men langs den meest natuurlijken weg tot die algemeene integraal moeten geraken. Bij de Eulersche integratie der volkomen differentiaal-vergelijkingen wordt dit in zekeren zin verricht; het is echter uit den aard der zaak duidelijk, dat de integratie der onvolkomen differentiaal-vergelijkingen, — bij wier vorming differentiatie en herleiding elkander geregeld of ongeregeld afwisselen, of die de eenvoudige uitdrukking zijn van de eene of andere wet, — op deze wijze met onoverkomelijke bezwaren moet gepaard gaan ten gevolge van de onbekendheid met de bewerkingen, die men heeft uit te voeren. Bij de methode van den integreerenden factor tracht men wel de factoren te bepalen, die bij de laatst volvoerde bewerking kunnen zijn weggevallen, om daarna de omgekeerde bewerking, de integratie, te kunnen verrichten; maar verder dan over eene enkele bewerking strekt zich daarbij het onderzoek zelden uit. De methode, die zich in het bijzonder het onderzoek naar die bewerkingen ten doel stelt, deze door eenvoudige teekens, symbolen, uitdrukt en in zeker opzicht op de aldus voorgestelde differentiaal-vergelijking de omgekeerde bewerkingen leert toepassen, is onder den naam van symbolische methode bekend. Als een produkt der laatste veertig jaren is zij nog in den bloei der jeugd, maarnu reeds heeft zij door de onderzoekingen van verschillende wiskundigen (waaronder Lobatto eene eerste plaats inneemt), zoo vele en zulke uitstekende resultaten opgeleverd, dat wij niet aarzelen haar onder de voornaamste integratie-methoden op te nemen.

108. Bij geene enkele der methoden verschilt de wijze, waarop men het voorgestelde doel tracht te bereiken, zoo zeer als bij deze symbolische; alles hangt bij deze af van den aard der vergelijking, waarop men haar wil toepassen.

De eenvoudigste toepassing heeft voorzeker plaats op de lineaire vergelijkingen met standvastige coëfficienten; is namelijk

$$\Phi(m) = 0$$

de équation caractéristique van zulk eene vergelijking, dan kan deze worden voorgesteld door

$$\Phi(d_x)\, y = \mathrm{X}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XVIII)}$$

en wijl hierin d_x als eene quantitatieve grootheid kan worden beschouwd, levert de ontwikkeling van

$$y = [\Phi(d_x)]^{-1}\, \mathrm{X}$$

onmiddellijk de algemeene integraal (Lobatto, N. Verh. K. Ned. Inst. blz. 97). Neemt men bijv. het geval van ongelijke wortels, dan verkrijgt men

$$y = \sum_1^n \frac{1}{\Phi'(m_k)} (d_x - m_k)^{-1}\, \mathrm{X}, \quad \ldots \quad \text{(XVIIIa)}$$

wanneer $m_1, m_2, \ldots\ldots m_n$ de wortels van $\Phi(m) = 0$ voorstellen. Met dezen op zich zelf onbruikbaren vorm moet men zich bij de toepassing der methode tevreden stellen, of men moet andere methoden te hulp roepen voor de bepaling van de beteekenis der eenvoudige uitdrukking

$$(d_x - m_k)^{-1}\, \mathrm{X},$$

waarvan de verdere oplossing geheel en al afhangt.

Zuiver practisch voordeel kan men aan de voorgaande integratie niet toekennen boven die, welke men verkrijgt door de toepassing van de methode van den integreerenden factor. Geen van beide methoden wordt om het betrekkelijk vele werk, dat zij vereischen, bij de beschouwde vergelijkingen rechtstreeks toegepast. Indirect gebruikt men daarbij de aanwijzingen van de laatstgenoemde methode, zooals de Eulersche vormen; maar eerst lang nadat men door deze vormen genoemde vergelijkingen had leeren oplossen, werden zij door die methode als de ware bijzondere integralen aangewezen.

Voert men alle bewerkingen bij de beide bovengenoemde methoden uit, dan is stellig de toepassing van die van den integreerenden factor de meest omslachtige (zie Mayr, § 26 en § 27), maar dan is ook de daardoor verkregen analyse volkomen; en juist die volledige, streng wetenschappelijke analyse, welke aan de methode hare hooge waarde geeft, is bij de toepassing der symbolische methode nooit te verkrijgen.

109. Bij de lineaire vergelijkingen met veranderlijke coëfficienten komen de symbolen

$$x \quad \text{en} \quad d_x$$

verbonden voor en, daar deze niet aan dezelfde wetten zijn onderworpen, kunnen die vergelijkingen niet op dezelfde wijze als die met standvastige coëfficienten worden behandeld. Om ze voor eene symbolische behandeling geschikt te maken, moet men ze in het algemeen eerst herleiden. Die herleiding is echter in den regel eenvoudig; men voert (Boole, Philos. Transactions. 1844. Part. II. p. 232) namelijk eene nieuwe onafhankelijk veranderlijke in door de substitutie $x = e^u$ en komt daardoor tot eene vergelijking van den vorm

$$[f_0\,(d_u) + f_1\,(d_u)\,e^u + f_2\,(d_u)\,e^{2u} + \ldots\ldots]\,y = \mathrm{F}\,(e^u), \quad \text{(XIX)}$$

welke geene verbonden symbolen $u^k d_u$ meer bevat en waarin dus d_u als eene quantitatieve grootheid kan worden beschouwd. Volvoert men nu op deze vergelijking de bewerking door de uitdrukking $[f_0(d_u)]^{-1}$ aangewezen, dan verkrijgt men

$$\left[1 + \frac{f_1\,(d_u)}{f_0\,(d_u)}\,e^u + \frac{f_2\,(d_u)}{f_0\,(d_u)}\,e^{2u} + \ldots\ldots\right] y = \frac{\mathrm{F}\,(e_u)}{f_0\,(d_u)},$$

waarvoor men kan schrijven

$$[1 + \Phi_1\,(d_u)\,e^u + \Phi_2\,(d_u)\,e^{2u} + \ldots\ldots]\,y = \mathrm{U}; \;\ldots \quad \text{(XIX}^{\mathrm{a}}\text{)}$$

en deze vergelijking is de meest algemeene symbolische voorstelling van de lineaire vergelijking met veranderlijke

coëfficienten, waarin ook die met standvastige coëfficienten ligt opgesloten.

110. In verreweg de meeste gevallen is de vergelijking (XIXa) niet in een gesloten vorm te integreeren; alleen wanneer zij in enkele bepaalde vormen voorkomt, is die integratie tot hiertoe gelukt, en dan dikwijls nog alleen onder gunstige omstandigheden.

Vooreerst is dit het geval, wanneer $\phi_k(d_u)$ voorkomt in den vorm

$$A_k\,\chi(d_u)\,\chi(d_u-1)\ldots\ldots\chi(d_u-k+1)\,e^{ku},$$

wijl men hiervoor kan schrijven

$$A_k\,[\chi(d_u)\,e_u]^k,$$

en daardoor de genoemde vergelijking den veel eenvoudigeren vorm

$$\{1+A_1\,\chi(d_u)\,e^u+A_2\,[\chi(d_u)\,e^u]^2+\ldots\ldots+A_n\,[\chi(d_u)\,e^u]^n\}\,y=U$$

aanneemt. Beschouwt men nu hierin $\chi(d_u)\,e^u$ als een enkel samengesteld symbool π_u, dan gaat deze vergelijking over in

$$[A_n\,\pi_u{}^n+A_{n-1}\,\pi_u{}^{n-1}+\ldots\ldots+A_1\,\pi_u+1]\,y=U, \quad (\text{XIX}^b)$$

waarin het symbool π_u aan dezelfde wetten is gebonden als boven d_x of d_u. Daar nu de afleiding van de algemeene integraal met standvastige coëfficienten (§ 108) niet alleen geldt voor het symbool d_x, maar ook voor elk ander enkelvoudig of samengesteld symbool, dat aan dezelfde wetten onderworpen is, zal de voorgaande vergelijking als zulk eene lineaire met standvastige coëfficienten kunnen worden behandeld en dus ook de uitkomst opleveren door vergelijking (XVIIIa) aangegeven, wanneer men daarin d_x door π_u vervangt. Men verkrijgt dus, indien ook hier $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n$ de wortels van de vergelijking

$$\Phi(m)=A_n\,m^n+A_{n-1}\,m^{n-1}+\ldots\ldots+A_1\,m+1=0$$

voorstellen en deze alle ongelijk zijn,

$$y=\sum_1^n\frac{1}{\Phi'(m_k)}\,(\pi_u-m_k)^{-1}\,U, \;.\;.\;. \quad (\text{XIX}^c)$$

waarin π_u door $\chi(d_u)\,e^u$ moet worden vervangen. Het hangt nu geheel en al van de waarde van $\chi(d_u)$ af, of de verkregen vergelijking (XIX^c) voor eene verdere gesloten integratie vatbaar is. Zulks zal steeds het geval zijn, wanneer

$$\chi(d_u) = \frac{d_u + a}{d_u + b}$$

is en dus tot eene vergelijking der eerste orde voert. De meest algemeene vergelijking der tweede orde, die op die wijze kan worden geïntegreerd, is echter

$$(p + qx + rx^2)\,x^2 y'' + [2bp + (a+b+2)\,qx + (2a+4)\,rx^2]\,xy' + \\ + [(b-1)\,bp + (a+1)\,bqx + (a+1)\,(a+2)\,rx^2]\,y = 0, \quad (66)$$

[36]) en deze staat in algemeenheid verre achter bij de vergelijkingen van Spitzer (§ 99) en Liouville (§ 102).

111. In de tweede plaats kan de vergelijking (XIX^a) den vorm hebben der binomische

$$[1 + \phi(d_u)\,e^{ku}]\,y = U, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (XX)$$

en ook in dit geval heeft men kans in de integratie volgens deze methode te slagen. Het is dan ook vroeger reeds opgemerkt, dat de binomische vergelijkingen zich het best leenen voor de behandeling van elke minder rechtstreeksche methode. Van daar dan ook, dat de symbolische methode, even als verscheidene andere, het meest op deze vergelijkingen of op zulke, die tot den binomischen vorm kunnen worden gebracht, is beproefd. Ook hier maken de herleidingen een wezenlijk deel der oplossing uit. Deze herleidingen hebben daarbij ten doel die vergelijkingen tot primaire terug te brengen, dat is: tot binomische vergelijkingen, die in den gewonen vorm onmiddellijk kunnen geïntegreerd worden. Of men dan ook in de gesloten integratie eener symbolische binomische vergelijking zal

---

[36]) Kapteijn, bl. 48. Zoowel in de opgave als in de oplossing zijn daar echter drukfouten ingeslopen.

slagen, hangt geheel en al daarvan af, of het gelukt deze in zulk eene primaire om te zetten. Het aantal bekende primaire vergelijkingen bepaalt dus hierbij grootendeels de algemeenheid van toepassing der methode; dat aantal is echter zeer gering en men heeft alle redenen om te onderstellen, dat het steeds zeer gering zal blijven, zelfs dan nog, wanneer men er diegene onder opneemt, welke bij bijzondere vergelijkingen behooren, die geheel en al den stempel der algemeenheid missen (Boole, p. 428).

Zoolang algemeene primaire vergelijkingen ontbreken, zijn dergelijke bijzondere van veel gewicht, en zal de verdere ontwikkeling dezer methode voor een groot deel afhangen van het vinden van zulke bijzondere primaire vergelijkingen en bij gevolg ook van de ontwikkeling der overige meer rechtstreeksche integratie-methoden.

112. Geene enkele methode is dan ook zoo hulpbehoevend als juist de symbolische; zonder de hulp van eene andere integratie-methode kan men door haar niet ééne vergelijking integreeren; met deze laatste verbonden voert zij echter dikwijls tot zeer gunstige resultaten, en — daar de eind-vergelijkingen, voor wier integratie men de hulp dier andere methoden behoeft, zeer eenvoudig geïntegreerd kunnen worden in vergelijking der oorspronkelijke, — wordt alsdan de verkregen uitkomst ten onrechte geheel aan de symbolische methode toegeschreven. Bij de lineaire vergelijkingen met veranderlijke coëfficienten bestaat eigenlijk de geheele methode slechts uit een of meer herleidingen, wier eenig doel is om eene moeilijk te behandelen vergelijking in een eenvoudigen vorm te brengen, die geïntegreerd kan worden. Uit het wezen der differentiaal-vergelijkingen volgt, dat men door die herleidingen slechts onder gunstige omstandigheden dat doel kan bereiken en dat wel des te meer, naargelang de symbolische eind-vergelijking onder meer verschillende vormen mag voorkomen.

Tot hiertoe zijn er slechts twee zoodanige vormen opgespoord: de lineaire (§ 110) en de binomische (§ 111). De laatste is veel algemeener dan de eerste; een groot aantal vergelijkingen neemt na eene goed gekozene herleiding den binomischen vorm aan, — maar, zooals wij boven gezien hebben, is ook zelfs het aantal symbolische binomische vergelijkingen, dat werkelijk geïntegreerd kan worden, zoo klein, dat het nog als een groot voorrecht moet beschouwd worden als eene differentiaal-vergelijking na volbrachte herleiding daartoe behoort. Om een enkel voorbeeld te geven: zal de binomische vergelijking

$$\left[1+\frac{A}{(d_u+p_1)(d_u+p_2)\ldots\ldots(d_u+p_n)}e^{nu}\right]z=U_1 \quad (67)$$

integreerbaar zijn, dan moet zij tot de primaire [37])

$$\left[1+\frac{A}{d_u^{n|-1}}e^{nu}\right]y=U \ldots\ldots\ldots (67^a)$$

kunnen worden teruggebracht en dit is alleen dan het geval, wanneer al de p's voldoen aan de voorwaarde (Boole, p. 424)

$$p_1-p_k+1-k=\theta n,$$

waarin θ een willekeurig positief of negatief geheel getal voorstelt; eene omstandigheid, die in de werkelijke toepassing slechts zelden zal plaats vinden. Zoo geeft de eenvoudige vergelijking

$$xy''+A_1y'+A_0xy=0 \ldots\ldots\ldots (47)$$

in symbolischen vorm gebracht

$$\left[1+\frac{A_0}{d_u(d_u+A_1-1)}e^{2u}\right]y=0,$$

eene vergelijking, die slechts tot eene primaire kan worden herleid, wanneer A_1 een geheel getal voorstelt.

---

[37]) De vergelijking (67^a) is de symbolische vorm voor

$$y^{(n)}+Ay=X.$$

Eene der meest algemeene vergelijkingen der tweede orde, die op deze wijze met vrucht kan worden behandeld, is

$$(a_2 + b_2 x) x^2 y'' + [a_2 (a_1 + 1) + b_2 (b_2 + 1) x] xy' + \\ + [a_2 b (a_1 - b) + b_2 (b_1 - 1) x] y = X \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

voor elke geheele positieve waarde van $b - a_1$ (zie Kapteijn, blz. 62).

113. In algemeenheid van toepassing staat dan ook de symbolische methode verre achter bij die der bepaalde integralen. Geene enkele lineaire vergelijking met veranderlijke coëfficienten, die ook maar, wat hare algemeenheid betreft, met die van Spitzer [38]) of van Liouville op eene lijn kan geplaatst worden, is tot hiertoe door haar geïntegreerd. Zal eene vergelijking, al is zij ook slechts van de tweede orde, met vrucht door haar kunnen worden behandeld, dan moeten hare coëfficienten òf een bepaalden vorm hebben, òf van elkander afhangen, zoo als zulks bijv. bij de vergelijkingen (66) en (68) plaats heeft.

Nog meer is dit het geval wanneer de differentiaal-vergelijking tot eene hoogere orde opklimt: terwijl voor deze de methode der bepaalde integralen bijna steeds minstens ééne bijzondere integraal oplevert, vereischt de mogelijkheid van de toepassing van de symbolische methode zoovele en zulke bepaalde voorwaarden, dat de vergelijkingen, die door deze methode kunnen worden opgelost, niet anders dan een zeer bijzonderen coëfficienten-bouw kunnen bezitten.

---

[38]) De vergelijking

$$xy'' + (a + x) y' + by = 0$$

geeft de symbolische

$$\left[1 + \frac{d + b - 1}{d (d + a - 1)} e^u\right] y = 0,$$

welke alleen voor geheele waarden van a en b tot eene primaire kan worden teruggebracht; voor de herleide Spitzersche vergelijking voert dus deze vorm nooit tot eene goede uitkomst.

114. Zijn echter de coëfficienten van dien aard, dat de methode kan worden toegepast, dan kan de oplossing met die der bepaalde integralen zeer goed wedijveren in kortheid van bewerking; en zelfs in gevallen, waarin de coëfficienten een tamelijk ingewikkelden vorm hebben, is zij dikwijls boven deze te verkiezen, doordat zij spoediger tot de algemeene integraal voert. Bovendien levert zij onmiddellijk de integraal der niet-herleide vergelijking, wat wel degelijk in aanmerking moet genomen worden.

115. Wanneer door eene methode eene meer of min algemeene vergelijking volledig geïntegreerd is, kan men voor de coëfficienten dier vergelijking willekeurige eindige waarden aannemen, steeds zal de integraal der daardoor verkregen vergelijking uit de algemeene integraal der eerstgenoemde kunnen worden afgeleid. Gelukt het derhalve door eene methode zulk eene algemeene vergelijking te integreeren, dan neemt daardoor de waarde der methode in hooge mate toe, zooals bijv. met de methode der bepaalde integralen het geval is geweest door de integratie der Spitzersche vergelijking.

116. **Middellijke toepassing der methode.** Door de symbolische methode is zulk eene algemeene integratie eener vergelijking met veranderlijke coëfficienten in dien zin tot hiertoe niet gelukt; toch biedt zij een gelijksoortig voordeel aan, dat met de constructie der differentiaal-vergelijkingen in verband staat en des te belangrijker is, wijl daardoor tal van vergelijkingen van de tweede en hoogere orde kunnen gevonden worden, wier integratie onmiddellijk tot die van lineaire vergelijkingen met standvastige coëfficienten kan worden teruggebracht. In § 110 is namelijk reeds opgemerkt, dat de integratie van deze laatste vergelijkingen niet alleen geldt voor het symbool d_x, maar ook voor elk ander enkelvoudig of samengesteld symbool π_x, dat aan dezelfde wetten als d_x is onderworpen.

De vergelijking (Boole, p. 402)

$$\phi(\pi_x)\,y = X \;\ldots\ldots\ldots\; \text{(XXI)}$$

zal derhalve dan ook de uitkomst opleveren, door de vergelijking (XVIII[a]) aangegeven, wanneer men daarin d_x door π_x vervangt. Onderstellen wij nu, dat men de gegeven differentiaal-vergelijking kan schrijven in den vorm

$$\pi_x(\pi_x + r)\,y = X, \;\ldots\ldots\ldots\; (69)$$

waarin π_x een samengesteld symbool is en staat voor

$$d_x + f(x),$$

dan is de differentiaal-vergelijking zelve geweest

$$y'' + [2f(x) + r]\,y' + \{f(x)\,[f(x) + r] + f'(x)\}\,y = X; \;.\,(70)$$

zoodat alle differentiaal-vergelijkingen, die in dezen laatsten vorm begrepen zijn, ook tot den voorgaanden (69) kunnen worden teruggebracht, en derhalve volgens de methode voor standvastige coëfficienten kunnen worden geïntegreerd. Neemt men nu voor $f(x)$ willekeurige rationeele functiën van x aan, dan kan men zooveel vergelijkingen van de tweede orde, die men aldus kan integreeren, vinden, als men verkiest.

117. Om op dezelfde wijze oplosbare lineaire differentiaal-vergelijkingen van de derde en hoogere orde te verkrijgen, kan men uitgaan van de vergelijking

$$[\pi_x(\pi_x + r)(\pi_x + s)\ldots\ldots]\,y = X, \;\ldots\;.\; (71)$$

en daarin aan π_x eveneens de waarde

$$d_x + f(x)$$

toekennen. Op verschillende wijzen kan men dit varieeren, bijv. door

$$\pi_x = d_x^2 + Ad_x + f(x)$$

te nemen, enz. Telkens komt men op nieuwe integreerbare vormen. Hoe hooger echter daarbij de orde der komende vergelijking wordt, hoe ingewikkelder vorm zij in het algemeen zal verkrijgen, en hoe zeldzamer het in de

toepassing zal voorkomen, dat eene bijzondere differentiaal-vergelijking tot den verkregen vorm behoort of kan gebracht worden (Kapteijn, blz. 39. d.).

118. **Verwisseling van symbool en argument.** Behalve op de boven beschouwde wijze kan het aantal integreerbare lineaire differentiaal-vergelijkingen met veranderlijke coëfficienten ook onbepaald vermeerderd worden door eene handelwijze, die bekend is onder den naam van de „verwisseling van het symbool d_x, d_u, π_x, enz. met het argument x of u". De verbindingen van deze symbolen met bewerkingen, die door functiën van het argument worden aangeduid, zijn namelijk onderworpen aan de beide wetten van Hargreave (Philos. Transact. 1848), die door de volgende formulen worden uitgedrukt:

$$\Phi(d_x)[f(x).y] = f(x).\Phi(d_x)y + f'(x).\Phi'(d_x)y + \\ + \tfrac{1}{2}f''(x).\Phi''(d_x)y + \ldots\ldots. \quad \text{(XXII)}$$

en

$$\Phi(x).f(d_x)y = f(d_x)[\Phi(x).y] - f'(d_x)[\Phi'(x).y] + \\ + \tfrac{1}{2}f''(d_x)[\Phi''(x).y] - \ldots\ldots, \quad \text{(XXIII)}$$

waarvan de eerste den vorm der tweede aanneemt, wanneer men d_x vervangt door $-x$ en x door d_x [39]).

Deze laatste omstandigheid leidt tot de gevolgtrekking, dat elke lineaire differentiaal-vergelijking, die in den vorm van eene der twee genoemde vergelijkingen kan geschreven worden, niet alleen onmiddellijk kan worden opgelost (wijl bijv. uit

$$\Phi(d_x)[f(x).y] = \mathrm{P}$$

terstond volgt

$$y = [f(x)]^{-1}[\Phi(d_x)]^{-1}\mathrm{P}),$$

maar ook door de genoemde verwisseling van symbool en

---

39) Voor de verwisseling van symbool en argument zie men Kapteijn, Hoofdstuk III.

gument aanleiding geeft tot de oplossing eener andere differentiaal-vergelijking; men moet echter hierbij wel in het oog houden, dat de oplossing in zuiver symbolischen vorm moet gehouden worden, en er dus geene bewerkingen mogen worden uitgevoerd of verwaarloosd, iets waartoe uitdrukkingen als $(x^{-1})\,0$, enz. lichtelijk aanleiding geven.

119. Door het gezegde zijn wij nu in staat om op eene gemakkelijke wijze de algemeene vergelijking

$$x\phi(d_x)\,[f(x).y] + r\phi'(d_x)\,[f(x).y] = X \quad . \; . \; . \; (72)$$

symbolisch te integreeren. Neemt men namelijk

$$f(x).y = z,$$

als nieuwe afhankelijk veranderlijke aan, dat gaat zij over in

$$x\phi(d_x)\,z + r\phi'(d_x)\,z = X, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (73)$$

wier oplossing door het voorgaande wordt teruggebracht tot die van de vergelijking

$$d_x\,[\phi(-x).z] + r\phi'(-x).z = X, \quad . \; . \; . \; . \; (74)$$

waarvoor men kan schrijven

$$z'\,\phi(-x) + (r-1)\,z\,\phi'(-x) = X.$$

Voor de integraal dezer laatste vergelijking vindt men na herleiding

$$z = [\phi(-x)]^{r-1}\,d_x^{-1}\,[\phi(-x)]^{-r}\,X,$$

derhalve voor die der vergelijking (73)

$$z = [\phi(d_x)]^{r-1}\,\{x^{-1}\,[\phi(d_x)]^{-r}\,X\},$$

en voor de gezochte integraal der gegeven vergelijking (72)

$$y = [f(x)]^{-1}\,[\phi(d_x)]^{r-1}\{x^{-1}\,[\phi(d_x)]^{-r}X\}. \; . \; . \; (72^a)$$

Welke waarden men nu ook in de vergelijking (72) aan $\phi(d_x)$ en $f(x)$ toekenne, steeds zal men door behulp van (72^a) in staat zijn de integraal der daardoor verkregen vergelijking in symbolischen vorm voor te stellen. Is daarbij r een positief of negatief geheel getal en komen

slechts geheele machten van d_x in die uitdrukking voor, dan heeft zij eene gemakkelijk aan te geven beteekenis en kan men die integraal ook op de gewone wijze uitdrukken. Bevat echter (72a) gebroken machten van d_x of eene gebroken waarde van r, dan mist zij alle beteekenis en zijn de bewerkingen dus zuiver symbolisch; door de bovengenoemde verwisseling van symbool en argument komt men echter alsdan terug op de vergelijking (74), wier oplossing voor elke waarde van r kan verklaard worden.

119. Neemt men in de vergelijking (72)

$$\phi(d_x) = d_x^n + p_1 d_x^{n-1} + \ldots\ldots + p_n$$

voor eene geheele positieve waarde van n, dan kan men op deze wijze tot integreerbare vergelijkingen geraken van de tweede, derde en hoogere orde; hoe meer hierbij echter de orde der vergelijking stijgt, hoe minder algemeen de komende vergelijkingen zullen zijn en dus ook, hoe minder waarde aan de afleiding moet worden toegeschreven. Die afleiding mist bovendien een algemeen karakter, doordat steeds aan de bovengenoemde voorwaarden moet worden voldaan, wil men niet tot eene uitdrukking komen, die geen zin en dus ook geene waarde heeft, en derhalve niet als de integraal der vergelijking mag worden beschouwd; zoo geeft de substitutie van

$$\phi(d_x) = d_x^2 + pd_x + q,$$

in de vergelijking (72):

$$xf(x)\,y'' + [(px + 2r)f(x) + 2xf'(x)]\,y' +$$
$$+ [(qx + pr)f(x) + (px + 2r)f'(x) + xf''(x)]\,y = X, \quad (75)$$

voor wier integraal men uit (72a) vindt

$$y = [f(x)]^{-1}(d_x^2 + pd_x + q)^{r-1}\{x^{-1}(d_x^2 + pd_x + q)^{-r}X\}, \quad (75^a)$$

en deze laatste heeft slechts beteekenis, wanneer r een geheel getal voorstelt, of ook wanneer $X = 0$ en dus de vergelijking (75) herleid is. In dit laatste geval kan de gevonden integraal ontwikkeld worden in de som van twee

reeksen: stellen namelijk m_1 en m_2 de wortels voor van de vergelijking

$$m^2 + pm + q = 0,$$

dan verkrijgt men

$$y = [f(x)]^{-1} x^{-r} \left\{ C_1 e^{m_1 x} \sum_0 \frac{(r-1)^{k|-1} r^{k|1}}{1^{k|1} (m_2 - m_1)^k x^k} + \right.$$
$$\left. + C_2 e^{m_2 x} \sum_0 \frac{(r-1)^{k|-1} r^{k|1}}{1^{k|1} (m_1 - m_2)^k x^k} \right\};$$

deze reeksen zijn voor eene gebrokene waarde van r zelden sommeerbaar, voor eene geheele waarde van r breken zij echter bij den $(\pm)$ r^{den} term af, zoodat zij in dit geval tot eene gesloten uitdrukking voeren.

120. De bovengevonden vergelijking (75), hoewel ver van algemeen te zijn, bevat tal van bijzondere lineaire vergelijkingen der tweede orde, die zeer dikwijls in de toepassing van de leer der differentiaal-vergelijkingen voorkomen. Bijna al die bijzondere vergelijkingen zijn echter ook bijzondere gevallen van de vergelijking

$$x f(x) y'' + 2[r f(x) + x f'(x)] y' + [q x f(x) + 2 r f'(x) + $$
$$+ x f''(x)] y = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (76)$$

welke uit de voorgaande verkregen wordt door $p = X = 0$ te stellen, zoodat de integraal dezer vergelijking door

$$y = [f(x)]^{-1} (d_x^2 + q)^{r-1} \{x^{-1} (d_x^2 + q)^{-r} 0\} \ldots \quad (76^a)$$

wordt uitgedrukt [40]).

[42]) Stelt men in de vergelijking (76)

$$f(x) = x^{-r} e^{\int X_1 dx},$$

dan verkrijgt men de vergelijking

$$y'' + 2X_1 y' + \left[X_1^2 + d_x X_1 + q - \frac{r(r-1)}{x^2}\right] y = 0,$$

die het eerst door Hargreave (Philos. Transact. 1848. Part. I) en door Curtis (Cambridge and Dublin Mathem. Journ. Vol. IX. p. 279) werd opgelost. De eerste geeft de integraal in den vorm van (76^a); de laatste daarentegen in den vorm

$$y = e^{-\int X_1 dx} x^{-r} (x^3 d_x)^{r-1} \{x^{3-2r} (C_1 e^{x\sqrt{-q}} + C_2 e^{-x\sqrt{-q}})\}.$$

Men kan echter de vergelijking (76) ook integreeren door de methode van de bepaalde integralen: zij gaat namelijk door de substitutie van

$$y = [f(x)]^{-1} y_1$$

over in de bekende vergelijking (§ 103)

$$xy_1'' + 2ry_1' + qxy_1 = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (47)$$

zoodat men voor hare integraal ook vindt

$$y = C_1 [f(x)]^{-1} \int_{-1}^{1} e^{xu\sqrt{-q}} (u^2 - 1)^{r-1} du +$$

$$+ C_2 x^{1-2r} [f(x)]^{-1} \int_{-1}^{1} e^{xu\sqrt{-q}} (u^2 - 1)^{-r} du, \; . \; . \; . (76^b)$$

welke nu echter alleen geldt voor

$$0 < r < 1,$$

en voor de overige waarden van r, zoowel als voor $r = \frac{1}{2}$ in eene bijzondere integraal overgaat (Zie §§ 103, 133 en 176). Door deze dubbele integratie van de vergelijking (76) is men nu in staat om uit de overeenkomst van (76^a) en (76^b) door analogie de symbolische integraal (72^a) voor $\Phi(d_x) = d_x^2 + q$ en $X = 0$ steeds tot den vorm van bepaalde integralen terug te brengen; ook voor andere waarden van $\Phi(d_x)$ heeft men getracht door kunstgrepen de symbolische integraal aldus door bepaalde integralen voor te stellen; die pogingen moeten echter tot hiertoe als mislukt of onvruchtbaar beschouwd worden.

121. De voorgaande handelwijze is van gewicht doordat zij ons, evenals die van § 116, in staat stelt het aantal integreerbare vergelijkingen onbepaald te vermeerderen. Zij heeft boven deze laatste voor, dat zij tot meer algemeene en in de toepassing meer voorkomende differentiaal-vergelijkingen voert, doordat bij de handelwijze van § 116 en vv. de zaak niet zoo algemeen wordt opgevat. Dikwijls echter voert zij tot niets beteekenende integralen, eene omstandigheid, die bij de laatstgenoemde nimmer kan voorkomen, wijl daarbij de integratie der geconstrueerde

vergelijkingen steeds tot die van lineaire vergelijkingen met standvastige coëfficienten wordt teruggebracht. Zij steunt bovendien op een minder vasten grond, doordat de formulen (XXII) en (XXIII), waarop alles aankomt, alleen zijn aangetoond voor geheele machten van d_x en voor gebroken machten in analogie met de gebroken machten in de algemeene rekenkunde voor geldend worden aangenomen: wil men trouwens bij de toepassing dier formulen tot eenig resultaat komen, dan moet $\Phi(d_x)$ wel eene rationeele functie zijn van d_x.

122. Uit de voorafgaande beschouwingen blijkt, dat geene enkele hoofd-methode, die ook de integratie in gesloten vorm beoogt, op zoovele verschillende wijzen tot de integraal eener differentiaal-vergelijking kan voeren, als de symbolische. Zij omvat eigenlijk een geheel stelsel van integratie-methoden [41]), wier respectieve toepassing geheel en al afhangt van den aard der differentiaal-vergelijking, die geïntegreerd moet worden. Die methoden, hoe uiteenloopend ook in de toepassing, staan tot elkander in het nauwste verband en voor alle zijn dan ook beginsel, wijze van opvatting en doel, in hoofdzaak hetzelfde. Door die omstandigheid brengt de symbolische methode meer eenheid in de integratie der differentiaal-vergelijkingen, dan zulks bij de uitsluitende aanwending der overige hoofdmethoden het geval is, en bij het betrekkelijk klein aantal vergelijkingen, dat door elke dezer laatste kan worden geïntegreerd, moet dit als het hoofdvoordeel der symboli-

[41]) Over de symbolische integratie eener differentiaal-vergelijking in reeksen meenden wij te mogen zwijgen wegens de geringe practische waarde, die daaraan verbonden is: alleen in geval de symbolische vergelijking binomisch is en dit met de oorspronkelijke vergelijking niet plaats heeft, zal deze methode even spoedig tot de integraal voeren als die der onbepaalde coëfficienten. Voorst gelden voor haar alle bezwaren, die wij vroeger bij de beschouwing dezer laatste opperden (Kapteijn, Hoofdst. IV).

sche methode worden aangemerkt. Bovendien kenmerken zich in het algemeen de oplossingen, door deze methode verkregen, door kortheid van bewerking. In algemeenheid van toepassing staat zij echter achter bij de methode der bepaalde integralen en hoewel men geen recht heeft om te onderstellen, dat elke oplossing, die door haar kan worden verkregen, ook op eene andere wijze zou kunnen gevonden worden, kunnen toch de meeste vergelijkingen, die door haar werden opgelost, ook door de methode der bepaalde integralen worden geïntegreerd.

Terwijl de overige hoofd-methoden, behalve die der reeksen, uitsluitend de integratie van differentiaal- en differentie-vergelijkingen beoogen, heeft de methode der symbolen, in den uitgebreidsten zin opgevat, een veel ruimeren werkkring, daar zij op alle symbolen betrekking heeft, die als stelkundige grootheden kunnen worden behandeld. Buiten de eigenlijke theorie der differentiaal-vergelijkingen zijn dan ook met hare hulp reeds vele en belangrijke theorema's op eene eenvoudige wijze bewezen en heeft zij dikwijls tot merkwaardige ontdekkingen gevoerd. Door de beknopte wijze, waarop door hare hulp lange en ingewikkelde vormen worden voorgesteld, heeft zij talrijke moeilijke berekeningen overbodig gemaakt, enz. Zoowel hierin, dat zij ook buiten de theorie der differentiaal-vergelijkingen wordt toegepast, als in de omstandigheid, dat zij op zoo verschillende wijzen tot de integraal eener differentiaal-vergelijking kan voeren, komt de methode der symbolen met die der reeksen overeen.

e. DE DIFFERENTIATIE DER DIFFERENTIAAL-VERGELIJKING.

α. Het verhoogen van de orde der vergelijking.

123. Is de vergelijking

$$F = 0$$

eene integraal van de differentiaal-vergelijking

$$f(xyy' \ldots\ldots y^{(n)}) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

dan zal zij ook eene integraal zijn van de vergelijking

$$f_1(xyy' \ldots y^{(n+1)}) = 0,$$

die door differentiatie van de voorgaande vergelijking (I) is ontstaan; derhalve zal $F = 0$ ook eene integraal zijn van al de differentiaal-vergelijkingen, die men verkrijgt door (I) twee, drie, of meermalen te differentieeren of door de aldus verkregen vergelijkingen onderling of met (I) te verbinden. De toepassing dezer eigenschap wordt met den naam van de methode van het verhoogen van de orde der differentiaal-vergelijking bestempeld, en heeft ten doel om door de genoemde differentiatie en combinatie eene nieuwe vergelijking te verkrijgen, die zich gemakkelijker laat behandelen, dan de oorspronkelijke. Het hangt geheel en al van den aard dezer vergelijking af, of men hierin kan slagen, en indien zulks het geval is, hoe de verkregen vergelijkingen moeten verbonden worden, om tot eene goede uitkomst te voeren: wij bepalen ons tot de volgende korte aanwijzingen.

Hernemen wij vooreerst de vergelijking (I), dan zal de p-malige achtereenvolgende differentiatie differentiaal-vergelijkingen opleveren van de $(n+1)^e$, $(n+2)^e$, ... $(n+p)^e$ orde, die wij door

$$f_1(xyy' \ldots\ldots y^{(n+1)}) = 0,$$
$$f_2(xyy' \ldots\ldots y^{(n+2)}) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
en
$$f_p(xyy' \ldots\ldots y^{(n+p)}) = 0$$

zullen voorstellen. Is nu de vergelijking (I) van dien aard, dat door de verbinding dezer verkregen vergelijkingen onderling en met of zonder (I) eene differentiaal-vergelijking van de $(n+p)^e$ orde

$$\Phi(xyy' \ldots\ldots y^{(n+p)}) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{I}^b)$$

kan worden afgeleid, waarvan men eene p^e integraal kan

bepalen, die van (I) verschilt, dan zal daardoor eene eerste integraal van deze laatste gevonden zijn. .

Zij namelijk

$$F\,(xyy' \ldots . y^{(n)}\, C_1\, C_2 \ldots . C_p) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (I^c)$$

die p^e integraal, dan kan men $y^{(n)}$ tusschen de vergelijkingen (I) en (I^c) elimineeren, waardoor men eene differentiaal-vergelijking verkrijgt van de $(n-1)^e$ orde, die p willekeurige standvastigen kan bevatten. Kan men alsdan $p-1$ onafhankelijke betrekkingen tusschen deze standvastigen opsporen (hetgeen geschiedt door differentiatie van de verkregen uitkomst der eliminatie en vergelijking van de zoo gevonden uitkomst met (I)), dan is eene eerste integraal der vergelijking (I) volledig bekend.

Is hierbij $p = 1$, dan zal de uit (I) en (I^c) door eliminatie van $y^{(n)}$ verkregen vergelijking slechts ééne willekeurige standvastige bevatten en dus onmiddellijk de gezochte eerste integraal zijn.

124. Het is echter niet altijd wenschelijk om $y^{(n)}$ te elimineeren; somtijds geraakt men eenvoudiger tot het doel door een anderen factor of term weg te maken, zooals blijkt uit het voorbeeld van Serret (Calcul infinitésimal, T. II. § 720)

$$ayy'\,(xy' - y) + (x^2 - b)\,y' - xy = 0, \quad \ldots \quad (77)$$

waarvoor men kan schrijven

$$axyy'^2 + (x^2 - ay^2 - b)\,y' - xy = 0;$$

door differentiatie verkrijgt men hieruit

$$(2\,axyy' + x^2 - ay^2 - b)\,y'' + (ay'^2 + 1)\,(xy' - y) = 0,$$

en dus ook na eliminatie van $x^2 - ay^2 - b$

$$(ay'^2 + 1)\,(xy'^2 - yy' + xyy'') = 0.$$

Daar de factor $ay'^2 + 1$, gelijk nul gesteld, waarden geeft, die niet aan de vergelijking (77) voldoen, heeft men dus ook

$$xyy'' + xy'^2 - yy' = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (77^a)$$

Door deze vergelijking op nieuw te differentieeren vindt men

$$xyy''' + 3\,xy'\,y'' = 0\,,$$

of

$$\frac{y'''}{y''} + 3\,\frac{y'}{y} = 0\,,$$

waaruit door integratie volgt

$$y'' = \frac{C_1}{y^3} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (77^b)$$

Voor deze laatste vergelijking kan men schrijven

$$y'\,\frac{dy'}{dy} = \frac{C_1}{y^3}$$

en hieruit vindt men

$$y^2\,y'^2 = -\,C_1 + C_2\,y^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (77^c)$$

Uit de verbinding van de vergelijkingen (77^a), (77^b) en (77^c) volgt verder

$$C_2\,y^2\,x - y^3\,y' = 0\,,$$

of

$$y' = \frac{C_2\,x}{y}.$$

Substitueert men nu deze waarde in (77) dan verkrijgt men voor de gezochte integraal

$$aC_2^2\,x^2 + C_2\,x^2 - C_2\,ay^2 - bC_2 - y^2 = 0\,,$$

of wat hetzelfde is

$$y^2 - C_2\,x^2 + \frac{bC_2}{aC_2 + 1} = 0\,;$$

tot welke uitkomst Serret ook komt, hoewel langs een geheel anderen weg.

125. Hoewel wij hier uitsluitend de differentiaal-vergelijkingen van de tweede en hoogere orde op het oog hebben, meenen wij hier toch het bovenstaande voorbeeld te moeten overnemen, wijl het zoo juist geschikt is om een goed denkbeeld te geven van eene dergelijke toepassing

van de methode. Het gunstige resultaat, dat wij daarbij verkregen, wordt hoofdzakelijk veroorzaakt door het wegvallen van den factor $ay'^2 + 1$ en de daardoor ontstane vereenvoudiging van de vergelijking, die uit de eliminatie van $x^2 - ay^2 - b$ voortsproot. Die gunstige omstandigheid zal zich echter zeer zelden voordoen, zoodat men op deze wijze dan ook zelden in de integratie der gegeven vergelijking zal slagen, en dat wel des te minder, naarmate de vergelijking ingewikkelder is van vorm.

126. Vooral bij lineaire vergelijkingen met standvastige coëfficienten, gelukt het echter dikwijls voor (I^b) eene vergelijking te verkrijgen, waarvan gemakkelijk de $(n+p)^e$ of algemeene integraal kan worden bepaald. Elimineert men alsdan uit deze integraal p willekeurige standvastigen, dan zal men ook de algemeene integraal van de gegeven vergelijking hebben gevonden.

Vooreerst kan zulks plaats hebben, wanneer het tweede lid eene geheele rationeele functie is van x, bijv. bij differentiaal-vergelijkingen van den vorm

$$y^{(n)} + \ldots + A_0 y = ax^{p-1} + bx^{p-2} + \ldots + qx + r, \quad (78)$$

daar hierbij de p-malige differentiatie onmiddellijk geeft

$$y^{(n+p)} + \ldots + A_0 y^{(p)} = 0,$$

welke vergelijking geen x bevat en dus terstond kan geïntegreerd worden.

In de tweede plaats is zulks het geval, wanneer het tweede lid eene geheele rationeele functie is van $Sin\ px$ of $Cos\ px$, die alleen in de eerste macht voorkomen; heeft men bijv. de vergelijking

$$y^{(n)} + \ldots + A_0 y = a\ Cos\ px + b\ Sin\ px, \quad (70)$$

dan geeft eene tweemalige differentiatie

$$y^{(n+2)} + \ldots + A_0 y'' = -ap^2\ Cos\ px - bp^2\ Sin\ px,$$

zoodat bij de verbinding dezer beide vergelijkingen de

tweede leden wegvallen en men dus eene herleide lineaire vergelijking tot uitkomst verkrijgt.

Tot een gelijksoortig resultaat geraakt men, wanneer het tweede lid eene analoge functie is van e^{px} of e^{-px}; zoo geeft de vergelijking

$$y^{(n)} + \ldots\ldots + A_0 y = ae^{px} + be^{-px}, \quad \ldots\ldots (80)$$

door haar twee malen te differentieeren

$$y^{(n+2)} + \ldots\ldots + A_0 y'' = ap^2 e^{px} + bp^2 e^{-px};$$

zoodat ook hierbij de tweede leden kunnen geëlimineerd worden.

Ook ingeval deze omstandigheden verbonden voorkomen kan de methode worden toegepast. Heeft men bijv. de vergelijking

$$y'' + 2y' + y = ae^x + be^{-x} + p\ Cos\ x + q\ Sin\ x, \quad \ldots (81)$$

dan geeft de vier-malige differentiatie

$$y^{VI} + 2y^{V} + y^{IV} = ae^x + be^{-x} + p\ Cos\ x + q\ Sin\ x,$$

zoodat men na aftrekking voor de eind-vergelijking vindt

$$y^{VI} + 2y^{V} + y^{IV} - y'' - 2y' - y = 0, \quad \ldots (81^a)$$

zijnde eene herleide vergelijking van de zesde orde.

Kwamen in de vergelijking (81) de meer algemeene termen e^{px} en e^{-px}, alsmede *Cos* qx en *Sin* qx voor, dan zou de eindvergelijking ook zijn van de zesde orde, hoewel men alsdan na de tweede differentiatie de goniometrische functiën zou moeten elimineeren, en na de tweede differentiatie der daardoor verkregen vergelijking de exponentieele; of omgekeerd.

127. Boven merkten wij reeds op, dat de algemeene integraal van de vergelijking (I^b) $n + p$ willekeurige standvastigen moet bevatten, en dat dus p derzelve moeten geëlimineerd of p betrekkingen tusschen dezelve moeten bepaald worden, om de algemeene integraal der gegeven vergelijking te verkrijgen. Die eliminatie is in den regel gemakkelijk, daar de uitkomst van de substitutie der ge-

vonden integraal in de gegeven vergelijking identiek nul moet zijn. Zoo verkrijgt men voor de algemeene integraal der vergelijking (81^a)

$$y = C_1 e^x + e^{-x} (C_2 + C_3 x + C_4 x^2) + C_5 \, Cos\, x + C_6 \, Sin\, x.$$

Substitueert men nu deze waarde in de vergelijking (81), dan vindt men

$$4C_1 e^x + 2C_4 e^{-x} - 2C_5 \, Sin\, x + 2C_6 \, Cos\, x =$$
$$= ae^x + be^{-x} + p \, Cos\, x + q \, Sin\, x,$$

en dus wijl deze vergelijking eene identieke moet zijn,

$$C_1 = \tfrac{1}{4} a, \quad C_4 = \tfrac{1}{4} b, \quad C_5 = -\tfrac{1}{2} q, \quad \text{en} \quad C_6 = \tfrac{1}{2} p;$$

derhalve voor de gezochte algemeene integraal

$$y = \tfrac{1}{4} ae^x + e^{-x} (C_2 + C_3 x + \tfrac{1}{2} bx^2) - \tfrac{1}{2} q \, Cos\, x + \tfrac{1}{2} p \, Sin\, x,$$

welke naar behooren nog twee willekeurige standvastigen bevat.

128. Als een schoon voorbeeld dezer eliminatie vermelden wij nog het volgende: zij de vergelijking

$$y'' - a^2 y = qx^p + r, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

dan geeft de $(p + 1)$-malige differentiatie

$$y^{(p+3)} - a^2 y^{(p+1)} = 0, \; .$$

waaruit men onmiddellijk vindt

$$y = \frac{C_1}{a^{p+1}} e^{ax} + \frac{C_2}{(-a)^{p+1}} e^{-ax} + \sum_0^p B_k x,$$

waarin B_k willekeurige standvastigen voorstellen. Substitueert men deze waarde van y in de gegeven vergelijking (82), dan verkrijgt men

$$\sum_2^p k^{2|-1} B_k x^{k-2} - a^2 \sum_0^p B_k x^k - qx^p - r = 0,$$

waarin geen C_1 of C_2 voorkomt, zoodat reeds blijkt dat dit de werkelijke willekeurige standvastigen zijn. Tusschen de B_k moeten dus $p + 1$ betrekkingen worden opgespoord, of m. a. w. de B_k moeten alle bepaald worden. Uit de

identiteit der laatstverkregen vergelijking volgt terstond

$$2B_2 - a^2 B_0 - r = 0,$$
$$(k+2)(k+1) B_{k+2} - a^2 B_k = 0,$$
$$- a^2 B_{p-1} = 0$$

en

$$- a^2 B_p - q = 0;$$

bijgevolg ook

$$B_{p-1} = 0,$$
$$B_p = -\frac{q}{a^2},$$
$$B_0 = \frac{1}{a^2}(-r + 2B_2)$$

en

$$B_k = \frac{1}{a^2}(k+2)(k+1) B_{k+2}.$$

Hieruit vindt men

$$B_{p-2k-1} = 0$$

en

$$B_{p-2k} = \frac{1}{a^{2k}} p^{2k|-1} B_p = -\frac{q}{a^{2k+2}} p^{2k|-1}.$$

Is dus p even, dan is

$$B_2 = -\frac{q}{a^p} p^{p-2|-1};$$

en is p oneven, dan is

$$B_2 = 0,$$

waardoor alle B's bepaald zijn.

129. Hoe schijnbaar ongerijmd het bij den eersten aanblik ook moge zijn, dat door de verhooging van de orde der differentiaal-vergelijking de integratie er van zou kunnen vereenvoudigd worden, uit het voorgaande ziet men, dat zulks bij de niet-herleide lineaire vergelijkingen met standvastige coëfficienten niet alleen wel degelijk het geval kan, maar ook meestal zal zijn, wanneer het gelukt om door de differentiatie de termen te verdrijven, die aan de integratie hinderlijk zijn. Men verkrijgt alsdan eene herleide lineaire vergelijking te integreeren, en daar deze integratie zeer gemakkelijk en spoedig afloopt, bepaalt

zich de meeste arbeid tot de bepaling der overtollige willekeurige standvastigen.

130. Ook bij de lineaire vergelijkingen met veranderlijke coëfficienten kan deze methode worden toegepast. Zij bijv. de vergelijking

$$x(1+x)y''-(3+7x)y'+15y=4x^4+7, \quad . \; . \quad (83)$$

dan vindt men door deze vijf-malen te differentieeren

$$x(1+x)y^{(7)}+(2+3x)y^{(6)}=0.$$

Voor de algemeene integraal dezer laatste vergelijking verkrijgt men

$$y=C_1\int^{(6)}\frac{dx^6}{x^2(1+x)}+\Gamma_6,$$

zoodat door de substitutie dezer waarde in de gegeven vergelijking vijf betrekkingen tusschen de willekeurige standvastigen moeten bepaald worden.

In dit voorbeeld was de eind-vergelijking gemakkelijk te integreeren; dit is echter zelden het geval, meestal is zij ingewikkelder dan de oorspronkelijke vergelijking, zoodat men bij die vergelijkingen met veranderlijke coëfficienten bijna steeds van de gewone aanvullings-methoden gebruik maakt.

131. Ook bij herleide lineaire vergelijkingen met veranderlijke coëfficienten wordt de verhooging van de orde dikwijls aangewend om de bezwaren te helpen overwinnen, die de integratie in den weg staan. Zoo hebben wij bijv. in § 99 gezien, dat de bekende Spitzersche vergelijking steeds tot den normaalvorm:

$$xy''+(p+q+x)y'+py=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (37^d)$$

kan worden teruggebracht, waarin p en q positieve gebruikelijke breuken voorstellen en dat alsdan de algemeene integraal door (37^e) wordt aangewezen. Heeft men nu de vergelijking

$$xy''+(-n+p+q+x)y'+(-n+p)y=0,$$

waarin n een posittief geheel getal voorstelt, en p en q aan de bovengenoemde voorwaarde voldoen, en differentieert men deze laatste vergelijking n-maal, dan vindt men achtereenvolgens:

$$xy''' + (1 - n + p + q + x)\, y'' + (1 - n + p)\, y' = 0,$$
$$xy^{\mathrm{IV}} + (2 - n + p + q + x)\, y''' + (2 - n + p)\, y'' = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$xy^{(n+1)} + (-1 + p + q + x)\, y^{(n)} + (-1 + p)\, y^{(n-1)} = 0,$$

en $xy^{(n+2)} + (p + q + x)\, y^{(n+1)} + py^{(n)} = 0;$

uit welke laatste vergelijking men door (37e) onmiddellijk $y^{(n)}$ verkrijgt. Men kan nu

$$y = \int^{(n)} y^{(n)}\, dx^n + \Gamma_n$$

stellen, en daarna het vereischte aantal betrekkingen tusschen de willekeurige standvastigen opsporen: liever gaat men echter aldus te werk: door uit de waarde van $y^{(n)}$ die van $y^{(n+1)}$ af te leiden en deze beide waarden in de voorlaatste vergelijking te substitueeren vindt men $y^{(n-1)}$; voorts uit de voor-voorlaatste $y^{(n-2)}$, enz. totdat de gegeven vergelijking na substitutie der gevonden waarden voor y' en y'' de waarde van y zelve oplevert.

132. Van deze handelwijze, die door Spitzer op verschillende vergelijkingen werd toegepast en daarom wel eens de Spitzersche methode [42]) genoemd wordt, maakt men vooral gebruik, wanneer het teeken van eene der coëfficienten der vergelijking oorzaak is, dat de aangewende methode eene onvolledige integraal oplevert of zelfs niet kan worden toegepast; zoo kan bijv. de vergelijking

$$y^{(n)} + A_1\, xy' + A_0\, y = 0, \quad \ldots\ldots \quad (84)$$

door de methode der bepaalde integralen worden geïntegreerd, indien A_1 en A_0 beide positief of beide negatief zijn. Hebben echter A_1 en A_0 ongelijke teekens, is bijv. $A_0 > 0$ en $A_1 < 0$, dan geeft de p-malige differentiatie

[42]) Hoewel Schlömilch haar heeft uitgedacht; Spitzer, 1e Forts. S. 56. Noot.

$$y^{(n+p)} + A_1 x y^{(p+1)} + (p A_1 + A_0) y^{(p)} = 0,$$

zoodat voor $p > -\frac{A_0}{A_1}$ de coëfficienten hetzelfde teeken hebben en dus de vergelijking geïntegreerd kan worden. Op de bovengenoemde wijze leidt men dan de waarde van y uit die van $y^{(p)}$ af. Is hierbij $\frac{A_0}{A_1}$ een negatief geheel getal, dan valt de laatste term der verkregen vergelijking weg, en gaat deze over in

$$y^{(n+p)} + A_1 x y^{(p+1)} = 0,$$

of voor

$$y^{(p+1)} = z,$$

in

$$z^{(n-1)} + A_1 x z = 0,$$

en voor

$$x \sqrt[n]{-A_1} = x_1,$$

in

$$\frac{d^{n-1} z}{d x_1^{\,n-1}} = x_1 z;$$

welke vergelijking door Lobatto (Crelle, Bd. XVII. 1837) door de methode der bepaalde integralen werd geïntegreerd. Voor hare algemeene integraal vond hij

$$z = \sum_1^n \int_0^\infty C_k \, \varepsilon_k \, e^{\varepsilon_k x_1 u - \frac{u^n}{n}} du,$$

waarin ε_k een wortel is der vergelijking

$$\varepsilon^n + 1 = 0,$$

en tusschen de willekeurige standvastigen de betrekking

$$\sum_1^n C_k = 0$$

bestaat, zoodat hierin slechts $n - 1$ willekeurige standvastigen voorkomen. De gegeven vergelijking vereischt echter

eene integraal met n willekeurige standvastigen, zoodat van de $p + 1$, die de substitutie van

$$y = \int^{(p+1)} z dx^{p+1} + \Gamma_{p+1}$$

medebrengt, er eene willekeurig moet zijn;

$$y = \Gamma_{p+1}$$

moet dus aan de gegeven vergelijking als bijzondere integraal voldoen voor p bepaalde betrekkingen tusschen de er in voorkomende $p + 1$ standvastigen, welke door substitutie kunnen gevonden worden. Op deze wijze kan de verhooging der orde op eene eenvoudige wijze tot eene bijzondere integraal der gegeven vergelijking (84) voeren, wanneer aan de voorwaarde, dat $\frac{A_0}{A_1}$ een negatief geheel getal is, voldaan wordt. Heeft men bijv. de vergelijking

$$y^{IV} + xy' - 2y = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

dan is

$$\frac{A_0}{A_1} = -2,$$

en dus $p = 2$; door de vergelijking 2-malen te differentieeren verkrijgt men

$$y^{VI} + xy''' = 0,$$

waaraan voldaan wordt door

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2.$$

Substitueert men deze waarde van y in de gegeven vergelijking, dan wordt de uitkomst identiek nul voor

$$C_0 = C_1 = 0,$$

zoodat

$$y = C_2 x^2$$

als eene bijzondere integraal aan haar voldoet.

Was de vergelijking

$$y^{IV} + xy' - 2y = 4x + 9, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

dan zou men op volkomen dezelfde wijze voor de bijzondere integraal gevonden hebben

$$y = C_2 x^2 - 4x - 4\tfrac{1}{2}.$$

133. In § 103 hebben wij gezien hoe de vergelijking

$$xy'' + A_1 y' + A_0 xy = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

algemeen kan geïntegreerd worden, wanneer voldaan wordt aan de voorwaarde

$$0 < A_1 < 2.$$

Valt A_1 buiten deze grenzen, en wil men van $+\infty$ of $-\infty$ als grenzen der integratie geen gebruik maken, dan heeft men slechts éène bijzondere integraal (47^d) of (47e); om deze aan te vullen kan men gebruik maken van de methode van de variatie der standvastigen of van die van den integreerenden factor. Men kan daartoe echter ook bovenstaande methode bezigen in een eenigszins gewijzigden vorm (Spitzer, S. 12. 1e Forst. S. 83; etc.). Zij bijv. $A_1 > 2$, dan kan men

$$A_1 = 2(p + \alpha)$$

stellen, waarin p een positief geheel getal en

$$\alpha < 1,$$

dus $2\alpha < 2$ is. In plaats van nu de vergelijking (47) zelve p-maal te differentieeren, tracht men haar door differentiaties en substituties uit de vergelijking

$$x Z'' + 2\alpha Z' + A_0 xZ = 0, \quad \ldots\ldots \quad (47^f)$$

af te leiden, – te construeeren, zooals men zulks noemt, – om daarna de integraal dezer vergelijking aan dezelfde bewerkingen te onderwerpen en zoodoende tot de gezochte integraal op te klimmen.

Door de substitutie van

$$Z = e^{x\sqrt{-A_0}} z$$

gaat de vergelijking (47^f) na deeling door $e^{x\sqrt{-A_0}}$ over in:

$$xz'' + 2xz'\sqrt{-A_0} + 2\alpha z\sqrt{-A_0} = 0.$$

Differentieert men deze vergelijking p-maal en stelt men $z^{(p)} = z_1$, dan verkrijgt men

$$xz_1'' + (p + 2\alpha + 2x\sqrt{-A_0})\,z_1' + A_1\sqrt{-A_0}.z_1 = 0,$$

waarin

$$z_1 = e^{-2x\sqrt{-A_0}}\,z_2$$

gesteld wordt, waardoor zij na deeling door $e^{-2x\sqrt{-A_0}}$ overgaat in:

$$xz_2'' + (p + 2\alpha - 2x\sqrt{-A_0})\,z_2' - 2\alpha\sqrt{-A_0}\,.\,z_2 = 0.$$

Door deze vergelijking weder p-maal te differentieeren en $z_2^{(p)} = z_3$ te stellen, vindt men

$$xz_3'' + (A_1 - 2x\sqrt{-A_0})\,z_3' - A_1\sqrt{-A_0}\,.\,z_3 = 0;$$

en eindelijk na hierin

$$z_3 = e^{x\sqrt{-A_0}}\,z_4,$$

gesubstitueerd te hebben, na deeling door $e^{x\sqrt{-A_0}}$:

$$xz_4'' + A_1 z_4' + A_0 z_4 = 0,$$

welke volkomen met de gegeven vergelijking (47) overeenstemt. Men heeft dus klaarblijkelijk ook

$$y = z_4 = e^{-x\sqrt{-A_0}}\,z_3 = e^{-x\sqrt{-A_0}}\,\frac{d^p}{dx^p}\,z_2 =$$

$$= e^{-x\sqrt{-A_0}}\,\frac{d^p}{dx^p}\left(e^{2x\sqrt{-A_0}}\,z_1\right) =$$

$$= e^{-x\sqrt{-A_0}}\,\frac{d^p}{dx^p}\left(e^{2x\sqrt{-A_0}}\,\frac{d^p}{dx^p}\,z\right) =$$

$$= e^{-x\sqrt{-A_0}}\,\frac{d^p}{dx^p}\left[e^{2x\sqrt{-A_0}}\,\frac{d^p}{dx^p}\left(e^{-x\sqrt{-A_0}}\,Z\right)\right],$$

waarin volgens § 103

$$Z = x^{1-2\alpha}\int_{-\sqrt{-A_0}}^{\sqrt{-A_0}} e^{ux}\,(u^2 + A_0)^{-\alpha}\,du$$

is. Nam men de waarde van Z, welke met (47^e) overeenkomt, dan zou men geene nieuwe bijzondere integraal verkregen hebben, daar (47^e) geldt voor alle positieve

waarden van A_1 en dus ook voor $A_1 > 2$ denzelfden vorm zal behouden [43]).

Is A_1 een geheel getal, dan ondergaat bovenstaande waarde van Z eene kleine wijziging; voor

$$A_1 = 2p$$

wordt $\alpha = 0$ en dus de vergelijking in Z (47^f):

$$Z'' + A_0 Z = 0,$$

waaruit volgt

$$Z = C_1 e^{x\sqrt{-A_0}} + C_2 e^{-x\sqrt{-A_0}},$$

zoodat men hierbij onmiddellijk de gezochte algemeene integraal der vergelijking (47) verkrijgt.

Voor

$$A_1 = 2p + 1$$

wordt $2\alpha = 1$ en derhalve de vergelijking in Z:

$$x Z'' + Z' + A_0 x Z = 0,$$

en nu gaat bovengenoemde integraal over in

$$Z = \int_{-\sqrt{-A_0}}^{\sqrt{-A_0}} e^{ux} (u^2 + A_0)^{-\frac{1}{2}} l\,[x\,(u^2 + A_0)]\,du.$$

Deze toepassing der Spitzersche methode leidt niet zoo spoedig tot de algemeene integraal als die van den integreerenden factor (§ 103); bij de aanwending dezer laatste methode verschijnt echter de integraal niet in zulk een fraaien en eenvoudigen vorm, als wij hier vonden.

---

[43]) Men zou ook van de vergelijking (47) kunnen uitgaan en door den omgekeerden weg te volgen de vergelijking (47^f) daaruit afleiden; dit kan echter niet rechtstreeks plaats hebben, wijl men alsdan voortdurend heeft te integreeren, maar alleen door eerst bovenstaande handelwijze te volgen en dan de bewerkingen in omgekeerde orde te herhalen.

β. De methode van Liouville.

134. De methode van de differentiatie der differentiaal-vergelijking werd in het voorgaande slechts in den engeren zin toegepast; d. w. z. wanneer gesproken werd van een p-malen differentieeren der vergelijking, dan werd onder p steeds een positief geheel getal verstaan. Hoewel Leibnitz (in een brief aan Joh. Bernoulli, Mei 1695) reeds van differentiaal-quotienten met willekeurige indices had gesproken [44]), was Liouville [45]) de eerste, die, door van deze gebruik te maken, bovenstaande methode trachtte te verruimen en toe te passen op de vergelijking

$$(a_2 + b_2 x + c_2 x^2) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + a_0 y = 0. \quad . . (60)$$

Differentieert men deze vergelijking p-maal, daarbij gebruik makende van het bekende theorema van Leibnitz voor de differentiatie van een product, dan verkrijgt men de vergelijking

$$(a_2 + b_2 x + c_2 x^2) y^{(p+2)} + [a_1 + b_2 p + (b_1 + 2c_2 p) x] y^{(p+1)} + \\ + [c_2 p (p-1) + b_1 p + a_0] y^{(p)} = \Gamma_p, \quad . . . (60^a)$$

waarin Γ_p gelijk is aan nul, wanneer p een positief geheel getal of ook nul is, en in alle andere gevallen de complementaire functie voorstelt.

De vergelijking (60a) heeft klaarblijkelijk denzelfden vorm als de gegevene; kiest men echter de tot hiertoe

---

44) Lagrange, Mém. de l'Acad. de Berlin. 1772; Zeitschrift v. Schlömilch, etc. Jahrg. XIV.

45) Éc. Polyt. T. XIII. Cah. XXI. 1832. p. 163. — Spitzer merkt in zijne Studiën, 1e Forts. S. 2. op, dat de methode van Liouville „eine schöne und gelungene Erweiterung" is van de methoden, welke voorkomen in eene in 1780 van Euler verschenen verhandeling; in welke alle gevallen, waarin de vergelijking

$$(1 - ax^2) y'' - bxy' - cy = 0$$

kan worden geïntegreerd, worden opgespoord.

onbepaald gelaten waarde van p zóó, dat voldaan wordt aan de vergelijking

$$c_2 p (p - 1) + b_1 p + a_0 = 0, \quad \ldots\ldots \quad (60^b)$$

en stelt men

$$y^{(p+1)} = z,$$

dan gaat (60^a) over in de lineaire vergelijking der eerste orde

$$(a_2 + b_2 x + c_2 x^2) z' + [a_1 + b_2 p + (b_1 + 2c_2 p) x] z = \Gamma_p, \quad (60^c)$$

welke gemakkelijk kan geïntegreerd worden.

135. Op welke wijze uit de waarde van z die van y moet worden afgeleid, hangt geheel en al van de waarde van p af. Geeft de vergelijking (60^b) $p = 0$, dan is ook $a_0 = 0$, en is dus de gegeven vergelijking onmiddellijk voor de integratie geschikt.

Vindt men voor p een positief geheel getal, dan is $\Gamma_p = 0$ en

$$y = \int^{(p+1)} z \, dx^{p+1},$$

welke laatste ($p + 1$)-malige integratie weder eene complementaire functie Γ_{p+1} medebrengt. Nu volgt uit (60^c)

$$z = C_1 e^{-\int \frac{a_1 + b_2 p + (b_1 + 2c_2 p) x}{a_2 + b_2 x + c_2 x^2} dx}, \quad \ldots \quad (60^d)$$

waarin C_1 werkelijk eene willekeurige standvastige voorstelt. Tusschen de standvastigen der genoemde complementaire functie moeten dus p betrekkingen gevonden worden, of m. a. w., tusschen deze standvastigen kunnen p betrekkingen worden bepaald, zoodanig dat

$$y = \Gamma_{p+1}$$

of wat hetzelfde is

$$y = \sum_0^p B_k x^k$$

(minstens) éene bijzondere integraal der gegeven vergelijking oplevert. Die betrekkingen vindt men door deze waarde van y in de vergelijking (60) te substitueeren; de

uitkomst dier substitutie moet identiek gelijk nul zijn; en dit geeft $p+1$ vergelijkingen van den vorm (Petzval, Bd. II. S. 78)

$$B_{p-k}\left[c_2(p-k)^{2|-1}+b_1(p-k)+a_0\right]+$$
$$+B_{p-k+1}\left[b_2(p-k+1)^{2|-1}+a_1(p-k+1)\right]+$$
$$+B_{p-k+2}\,a_2(p-k+2)^{2|-1}=0, \quad \ldots\ldots \quad (60_e)$$

van $k=0$ tot en met $k=p$, waarbij B_{p+1}, enz., B_{-1}, enz. gelijk nul moeten genomen worden. Voor $k=0$ heeft men dus de vergelijking

$$B_p\left[c_2\,p\,(p-1)+b_1p+a_0\right]=0;$$

aan deze wordt echter volgens (60^b) steeds identiek voldaan, zoodat B_p willekeurig blijft, en men door de overige p vergelijkingen (60e) de standvastigen B_0 tot en met B_{p-1} in B_p kan uitdrukken. Is p een positief geheel getal, dan levert dus werkelijk de substitutie van

$$y=\sum_0^p B_k\,x^k$$

éene bijzondere integraal. De tweede bijzondere integraal verkrijgt men alsdan uit

$$y=\int^{(p+1)} z\,dx^{p+1};$$

in de meeste gevallen is het echter gemakkelijker door de methode van de variatie der standvastigen de eerstgevondene aan te vullen.

Heeft men bijv. de vergelijking

$$(1+x^2)\,y''+xy'-16\,y=0, \quad \ldots\ldots \quad (87)$$

dan wordt (60^b)

$$p^2-16=0$$

en dus

$$p=\pm 4.$$

Met $p=4$ stemt nu overeen de bijzondere integraal

$$y_1=\sum_0^4 B_k\,x^k;$$

door deze in de gegeven vergelijking te substitueeren verkrijgt men

$$B_0 = \tfrac{1}{8} B_4, \; B_1 = B_3 = 0 \text{ en } B_2 = B_4,$$

en dus voor de bijzondere integraal

$$y_1 = B_4 (x^4 + x^2 + \tfrac{1}{8}).$$

Om deze integraal aan te vullen kan men zooals wij boven zeiden gebruik maken van de methode van de variatie der standvastigen; schrijft men daartoe de vergelijking (87) in den vorm

$$y'' + X_1 y' + X_0 y = 0,$$

dan vindt men door de substitutie (zie § 159) van

$$y = y_1 \int v \, dx,$$

voor de tweede bijzondere integraal

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int X_1 dx} dx,$$

en dus door invoeging der waarden voor y_1 en X_1

$$y_2 = (x^4 + x^2 + \tfrac{1}{8}) \int (x^4 + x^2 + \tfrac{1}{8})^{-2} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Voor de vergelijking in z (60c) vindt men

$$z = C_1 (1 + x^2)^{-\frac{9}{2}},$$

en dus ook

$$y = C_1 \int^{(5)} (1 + x^2)^{-\frac{9}{2}} dx^5$$

voor de tweede bijzondere integraal; deze laatste vorm is echter niet zoo eenvoudig als de zoo even gevonden.

136. In het voorgaande voorbeeld was eene waarde van p positief en de andere negatief; zijn echter de beide waarden van p positieve geheele getallen p_1 en p_2, en is $p_1 > p_2$, dan zal, wanneer men van de grootste p_1 gebruik maakt,

$$c_2 (p_1 - k)^{2|-1} + b_1 (p_1 - k) + a_0$$

voor

$$k = p_1 - p_2$$

nul en bijgevolg ook B_{p2} oneindig groot worden, indien niet ook de overige termen van de vergelijking (60e), waarbij zulks plaats heeft, nul zijn. In dit laatste geval wordt ook B_{p2} willekeurig en geeft dus p_1 onmiddellijk eene vergelijking met twee willekeurige standvastigen, derhalve de algemeene integraal der beschouwde vergelijking.

Is deze bijv.

$$x(1+x)y'' - (3+7x)y' + 15y = 0, \quad . \; . \; . \quad (88)$$

dan vindt men voor de vergelijking (60b)

$$p^2 - 8p + 15 = 0,$$

en dus

$$p_1 = 5 \quad \text{en} \quad p_2 = 3.$$

Met $p_1 = 5$ komt overeen de integraal

$$y = \sum_0^5 B_k x^k,$$

die door substitutie in (88) geeft

$$B_4 = 5B_5, \; B_2 = B_3, \; B_1 = \tfrac{1}{2} B_3 \text{ en } B_0 = \tfrac{1}{10} B_3,$$

zoodat men vindt

$$y = B_5 (x^5 + 5x^4) + B_3 (x^3 + x^2 + \tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{10}),$$

zijnde eene integraal met twee willekeurige standvastigen en dus de gezochte algemeene integraal.

Had men $p = 3$ en

$$y = \sum_0^3 B_k x^k$$

genomen, dan zou men verkregen hebben

$$B_2 = B_3, \; B_1 = \tfrac{1}{2} B_3 \text{ en } B_0 = \tfrac{1}{10} B_3,$$

even als boven; derhalve nu slechts de bijzondere integraal

$$y = B_3 (x^3 + x^2 + \tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{10}).$$

In verreweg de meeste gevallen, waarin p_1 en p_2 beide positieve geheele getallen voorstellen, zal echter bij het gebruik maken van de waarde p_1 de standvastige B_{p2} oneindig groot worden en die waarde dus tot niets leiden;

men kan in die gevallen alleen de bijzondere integraal bepalen, die met de waarde p_2 overeenstemt. Evenzoo verkrijgt men slechts ééne bijzondere integraal, wanneer de vergelijking (60^b) gelijke wortels heeft, en dus $p_1 = p_2$ is.

137. Heeft de vergelijking (60^b) een positieven en een negatieven wortel, dan levert de positieve eene gesloten bijzondere integraal van den vorm

$$y = B_p f(x),$$

zooals uit de beschouwing van de vergelijking (87) blijkt. Voor de negatieve waarde van p wordt echter Γ_p in de vergelijking (60^c) niet gelijk nul; men kan echter gemakkelijk aantoonen (Spitzer, 1e Forts. S. 8), dat men in dit geval toch tot ééne bijzondere integraal der vergelijking (60) zal geraken, wanneer men Γ_p gelijk nul stelt, zoodat de waarde van z uit de vergelijking (60^d), verbonden met

$$y = \frac{d^{-p-1}}{dx^{-p-1}} z,$$

die bijzondere integraal oplevert.

Met de waarde $p = -4$ uit de vergelijking

$$(1 + x^2) y'' + xy' - 16 y = 0 \quad \ldots\ldots \quad (87)$$

komt bijv. overeen de vergelijking

$$(1 + x^2) z' - 7x z = 0,$$

waaruit volgt

$$z = C_1 (1 + x^2)^{\frac{7}{2}}$$

en

$$y_2 = C_1 \frac{d^3}{dx^3} (1 + x^2)^{\frac{7}{2}}.$$

Deze laatste bijzondere integraal geeft met de vroeger gevondene de gezochte algemeene integraal.

138. Uit het voorgaande blijkt, dat men door de methode van Liouville steeds gemakkelijk eene bijzondere integraal der vergelijking (60) kan bepalen, wanneer de

coëfficienten c_2, b_1 en a_0 van dien aard zijn, dat aan de vergelijking (60^b) door minstens eene geheele waarde van p wordt voldaan, zoodat in dat geval genoemde vergelijking (60) algemeen bruikbaar geïntegreerd kan worden.

Heeft echter de vergelijking (60^b) geen enkelen geheelen wortel, dan verschijnen de bijzondere integralen, in den vorm van differentiaal-quotienten met gebroken, irrationeele of zelfs met complexe indices; hoewel zulke differentiaal-quotienten meer en meer in de analysis worden ingevoerd, missen zij toch geheel en al het karakter van volledig bepaalde functiën, zoodat men ze tot hiertoe alleen als zuivere symbolen kan beschouwen. De zoo verkregen bijzondere integralen zijn dan ook slechts symbolische uitdrukkingen, waardoor in een zeer beknopten vorm y als eene functie van x wordt voorgesteld. Niet alleen de $(p+1)$-malige differentiatie, maar ook de onbepaaldheid van de functie Γ_p, die hierbij in de vergelijking (60^c) voorkomt, maken echter die uitdrukkingen zoo onbruikbaar, dat men hierbij gaarne de wiskundige strengheid aan den eenvoud opoffert door $\Gamma_p = 0$ te stellen. Zoo zou de vergelijking

$$xy'' + (p + q + x)\,y' + py = 0\,, \quad \ldots\ldots \quad (37^d)$$

waarin p en q positieve gebruikelijke breuken voorstellen, en die ook als een bijzonder geval van de vergelijking (60) kan worden beschouwd, voor bijzondere integraal geven

$$y = \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\left(\frac{e^{-x}}{x^q}\right) + \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}\int\frac{dx}{x}\,\Gamma_p\,, \quad \ldots \quad (37^f)$$

eene uitdrukking, die alle beteekenis mist.

In dit geval kan men ook

$$y = \overset{p}{\Sigma}\, B_k\, x^k$$

als eene bijzondere integraal beschouwen en de waarden der B's bepalen door de substitutie in de gegeven vergelijking. Men verkrijgt alsdan ééne, en ingeval $p_1 - p_2$ geen

positief of negatief geheel getal is, zelfs twee bijzondere integralen in den vorm van, naar de opklimmende machten van x gerangschikte, reeksen; alleen voor zoover die reeksen convergeeren hebben zij waarde, hoewel deze, zooals wij vroeger hebben gezien, steeds zeer gering is (§ 77).

139. Eene vergelijking kan derhalve door de methode van Liouville geïntegreerd worden, indien zij door eene p-malige differentiatie tot den vorm (60c) kan worden teruggebracht. Daartoe wordt in elk geval vereischt, dat de coëfficient van y' de veranderlijke x bevat. Van de vergelijkingen der tweede orde is de vergelijking (60) de meest geschikte, wijl hierin de hoogste macht van x voorkomt in de volgende orde: 2, 1, 0. Gaat deze over in 1, 1, 0 of in 0, 1, 0, dan zal nog de methode tot goede uitkomsten kunnen leiden. Was echter die volgorde 3, 2, 1, dan zou het vaststellen van $y = \sum_0^p B_k x^k$ als bijzondere integraal reeds $p + 2$ vergelijkingen (60e) opleveren, en dus de methode in 't algemeen tot geene uitkomst voeren (Petzval, Bd. II. S. 80).

140. Beschouwt men eene vergelijking door deze methode slechts als opgelost, wanneer zij tot eene volledig bepaalde of bruikbare gesloten integraal voert, dan is hare toepassing binnen veel engere grenzen beperkt, dan die der bepaalde integralen. Voor de vergelijkingen van de tweede orde blijkt dit reeds genoegzaam uit de voorgaande beschouwingen, daar zelfs voor de vergelijking (60) van Liouville, die voor hare toepassing zoo uiterst geschikt is, de gevallen, waarin zij ons zulk eene bruikbare integraal oplevert, zeer gering zijn (Spitzer, 1e Forts. § 1—24; zie ook Spitzer, § 15—19); en zelfs dan, wanneer men deze methode toepast op zeer bijzondere vergelijkingen, zooals bijv. op de meermalen genoemde vergelijking

$$xy'' + A_1 y' + A_0 xy = 0, \qquad (47)$$

kan aan de verkregen uitkomst

$$y = C_1 e^{x\sqrt{-A_0}} d_x^{\frac{A_1}{2}-1} \left[e^{-2x\sqrt{-A_0}} x^{-\frac{A_1}{2}} \right] +$$
$$+ C_2 e^{-x\sqrt{-A_0}} d^{\frac{A_1}{2}-1} \left[e^{2x\sqrt{-A_0}} x^{-\frac{A_1}{2}} \right]$$

slechts voor bijzondere waarden der coëfficienten, hier voor A_1 een even getal, beteekenis worden toegekend. In dit laatste geval is echter die vorm veel eenvoudiger dan die, welke door de toepassing van de methode der bepaalde integralen wordt verkregen.

141. Het aantal vergelijkingen van hoogere orde, waarvan het gelukte door deze methode eene bruikbare integraal te bepalen, is zeer gering en bepaalt zich bijna uitsluitend tot de binomische vergelijking (Liouville, Éc. Polyt. T. XV. Cah. XXIV. p. 52)

$$x^{\frac{n}{2}} y^{(n)} + Ay = X \quad \ldots\ldots\ldots \quad (89)$$

in den herleiden of niet-herleiden vorm; en voor deze vergelijking heeft de verkregen integraal nog alleen beteekenis voor onevene getalwaarden van n. Voor evene waarden van n vindt men hierbij functiën, die aan eene $\frac{n-1}{2}$-malige integratie of eene $\frac{n+1}{2}$-malige differentiatie moeten onderworpen worden en dus alle beteekenis missen; zoo verkrijgt men bijv. voor de eenvoudige vergelijking (Spitzer, S. 56)

$$xy'' = y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (90)$$

door deze methode eene der beide volgende integralen

$$y = \int^{(\frac{1}{2})} (C_1 e^{2\sqrt{x}} + C_2 e^{-2\sqrt{x}})\, dx^{\frac{1}{2}}$$

of

$$y = x\, d_x^{\frac{3}{2}} (C_1 e^{2\sqrt{x}} + C_2 e^{-2\sqrt{x}});$$

uitdrukkingen, die niet als bruikbare gesloten integralen kunnen worden beschouwd, zoolang het niet gelukt is ze in bepaalde functiën over te brengen. Als werkelijke integratie-methode voor vergelijkingen van hoogere orde heeft

deze methode dan ook eene nog veel meer beperkte toepassing dan die der bepaalde integralen, en komt zij meer overeen met de rechtstreeksche toepassing van de methode der symbolen.

142. Evenals de methode van de verhooging der orde der differentiaal-vergelijking is zij echter uitstekend geschikt om de bezwaren te helpen overwinnen, die de toepassing van de methode der bepaalde integralen in den weg staan, of ook om eigenschappen van de integraal eener gegeven vergelijking op te sporen en aan hare integratie dienstbaar te maken. Zij bijv.

$$y = F(p, q, x)$$

de algemeene integraal der herleide Spitzersche vergelijking

$$xy'' + (p + q + x) y' + py = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37^d)$$

dan leert de k-malige differentiatie, dat

$$F(p + k, q, x) = d_x{}^k F(p, q, x)$$

is, en evenzoo leert de substitutie van

$$y = e^{-x} z \qquad \text{en} \qquad x = -x_1$$

en de daaropvolgende k-malige differentiatie, dat

$$F(p, q + k, x) = (-1)^k e^{-x} d_x{}^k [e^x F(p, q, x)];$$

en met behulp van deze beide eigenschappen kan de integratie der genoemde vergelijking steeds tot die eener analoge worden teruggebracht, waarin p en q positieve gebruikelijke breuken voorstellen (Schlömilch, S. 525). Tal van dergelijke eigenschappen van de integralen van bijzondere vergelijkingen vindt men bij Spitzer (Studiën, u. s. w.) vermeld, en het verhoogt niet weinig de waarde van de methoden van de differentiatie der differentiaal-vergelijking, dat zij (zie ook § 131—133) op zulk eene eenvoudige wijze de toepassing van de methode der bepaalde integralen begunstigen en mogelijk maken. Met deze laatste methode hebben zij bovendien dit gemeen, dat een groot gedeelte van

den arbeid, dien men heeft te verrichten, in vele gevallen wordt vereischt voor de bepaling van de overtollige willekeurige standvastigen. Onder de overige hoofd-methoden vindt men dit verschijnsel alleen bij de symbolische, en wel ten gevolge van de herleidingen, die men eene vergelijking moet doen ondergaan om haar tot eene primaire terug te brengen. In dit laatste geval kan men echter veelal onmiddellijk aangeven (Boole, Ch. XVII. 4. Ch. XXX. 4) welke der verkregen standvastigen als willekeurig moeten worden beschouwd, waardoor de bepaling der overige gemakkelijker wordt gemaakt.

---

143. Uit de voorgaande beschouwingen ziet men, dat de methode van den integreerenden factor zich boven al de overige methoden onderscheidt door vastheid van grondslag, algemeenheid van opvatting, uitgebreidheid van toepassing en nog meer door uitgebreidheid van gebied. Zij heeft alleen betere en meerdere uitkomsten gegeven dan alle overige methoden, die ook de integraal opleveren in een gesloten vorm, samen. Bij geene enkele methode gaat men zoo streng wetenschappelijk te werk als bij haar, of het moest zijn bij die van de scheiding der veranderlijken, die echter om de beperktheid van toepassing niet met haar op eene lijn kan gesteld worden. De integratie geschiedt bij deze beide methoden voet voor voet, zoodat als eenmaal de algemeene integraal gevonden is, ook al de overige integralen van de 1e tot en met de $(n-1)^e$ bekend zijn (§ 46). De methode van den integreerenden factor is bovendien de eenige, door welke men er in slaagde eene geheel algemeene vergelijking onder alle omstandigheden zuiver en volledig te integreeren.

Maar ook in een ander opzicht staat zij boven de overige methoden: behalve dat door de methoden der reeksen

geheel algemeen wordt aangetoond, dat de algemeene integraal eener differentiaal-vergelijking der n^e orde steeds uit n onderling onafhankelijke bijzondere integralen is samengesteld (§ 81), en steeds n willekeurige standvastigen moet bevatten, — is de methode van den integreerenden factor de eenige, die uitkomsten heeft geleverd, welke voor de ontwikkeling van de theorie der differentiaal-vergelijkingen van belang zijn. Zij leert ons

dat elke differentiaal-vergelijking van de n^e orde n integreerende factoren heeft; waaruit onmiddellijk volgt, dat de algemeene integraal van zulk eene vergelijking n willekeurige standvastigen kan bevatten;

dat tusschen die integreerende factoren en de bijzondere integralen bepaalde betrekkingen bestaan;

dat de bijzondere integralen van de lineaire vergelijkingen met standvastige coëfficienten moeten zijn van den vorm $y = e^{mx}$, en die van de lineaire vergelijkingen met coëfficienten van den vorm $A_k(a + bx)^k$ van den vorm $y = (a + bx)^m$, en eindelijk

dat de algemeene lineaire vergelijkingen van de tweede en hoogere orde niet algemeen kunnen worden geïntegreerd.

Deze theoretische uitkomsten zijn van het hoogste belang en geven aan de methode van den integreerenden factor een zeer groot overwicht boven de overige, die tot hiertoe tot geen enkel algemeen resultaat voerden. Wel werden door sommige methoden eigenschappen ontdekt van de integralen van enkele bijzondere vergelijkingen, maar deze hebben voor de theorie, die zich niet met elke vergelijking in het bijzonder kan bezighouden, geene waarde (§ 142). De methode van den integreerenden factor is dan ook de eenige, die ontegenzeggelijk wetenschappelijke waarde heeft, en het schijnt dan ook, dat men in de toekomst alleen van de ontwikkeling dezer methode resultaten kan verwachten, die tot eene meer volledige kennis van de differentiaal-vergelijkingen zullen leiden.

144. Van de overige methoden, die de integraal in een gesloten vorm opleveren, is de methode der bepaalde integralen de voornaamste. Geene enkele dier methoden is sedert hare invoering zoo geheel van aard veranderd als zij: de noodzakelijke bewerkingen werden vereenvoudigd, de willekeurige onderstellingen werden bijna overbodig, de bijzondere integraal is in geheel verschillende vormen vastgesteld en zelfs zijn de grenzen der bepaalde integraal als veranderlijk aangenomen. Zoo kwam, behalve de vorm

$$y = \int_{u_1}^{u_2} e^{u^p x}\, U\, du,$$

de vorm van Euler

$$y = \int_{u_1}^{u_2} (x + pu)^{\alpha}\, U\, du,$$

[46]) waarin ook α en p als nog onbekende standvastige grootheden worden beschouwd, in gebruik. Zelfs werd de bijzondere integraal nog vastgesteld in den vorm [47])

$$y = \int_{u_1}^{u_2} \phi .\, U du,$$

waarin ϕ eene functie voorstelt van $u + x$, ux, $\frac{u}{x}$, enz., die als integraal aan eene bepaalde vergelijking voldoet. Door deze verschillende wijzigingen werd de aanwending der methode vrijer en ruimer, zoodat zij thans dan ook van al de bovengenoemde methoden de uitgebreidste toepassing heeft. Ondersteund door de methoden van de differentiatie der differentiaal-vergelijking voert zij tot de schoonste uitkomsten, die alleen door die van de methode

---

[46]) Euler, Vol. II. Cap. XI; Raabe, S. 260 u. 280; Weiler, Crelle. Bd. LI. S. 129; Spitzer, § 19, 1e Forts. § 24; Schlömilch, S. 525; enz.

[47]) Spitzer, 1e Forts. §§ 49, 52, 2e Forts. §§ 28, 36, 37, 42, 61, 62, enz. Somtijds wordt zelfs de integraal vastgesteld in geheel andere vormen, zooals $y = d_u^p (e^{ux} U)]_{u_1}$, Petzval, Bd. II. S. 369. Deze vorm leidt echter meestal tot divergeerende reeksen; Spitzer, § 20 en 21, Noot.

van den integreerenden factor in algemeenheid en volledigheid van analyse overtroffen worden. Bovendien kan de rechtstreeksche constructie der differentiaal-vergelijkingen, waaraan thans meer en meer waarde wordt toegekend, niet anders dan voordeelig werken op de toepassing der genoemde methode. Door den coëfficientenbouw der geconstrueerde vergelijkingen kan namelijk worden aangewezen in welken vorm men de bijzondere integraal moet vaststellen, om de meeste kans te hebben in de integratie der vergelijking te slagen (Mayr, S. 135).

145. Aan welke der overige methoden, die de integraal in een gesloten vorm opleveren, men de derde plaats moet toekennen, is moeilijk te beslissen. Iedere methode heeft haar voor en tegen.

Die van de scheiding der veranderlijken berust op den meest vasten grondslag; levert de integraal steeds in een fraaien, bruikbaren vorm, voorzien van het vereischte aantal willekeurige standvastigen; geeft onmiddellijk de integraal der niet-herleide vergelijking; kenmerkt zich door eenvoud en kortheid van bewerking, vooral bij vergelijkingen van de tweede orde; is zelfs toepasselijk op niet-lineaire vergelijkingen — maar is zeer beperkt in de toepassing.

De methode van Liouville kenmerkt zich ook door eenvoud en kortheid van bewerking; is zeer geschikt om de methode der bepaalde integralen te ondersteunen; levert dikwijls de integraal in een zeer eenvoudigen vorm, maar onderstelt daarbij bepaalde betrekkingen tusschen de coëfficienten der vergelijking; — wordt aan die betrekkingen niet voldaan, dan voert zij niet tot een gesloten of tot een onbruikbaar resultaat; — bovendien geschiedt de toepassing dezer methode niet altijd even streng.

De methoden der symbolen zijn uitgebreider in toepassing dan de beide voorgaande methoden; zij vereischen echter meer arbeid; zijn minder rechtstreeks, of behoeven de hulp van eene andere methode; leveren dikwijls de

de integraal in een eenvoudigen gesloten vorm, meestal echter in een gesloten vorm, die alleen beteekenis heeft, wanneer de coëfficienten der vergelijking aan bepaalde voorwaarden voldoen; — wordt aan deze voorwaarden niet voldaan, dan heeft die vorm geene beteekenis en is zij alleen bij herleide vergelijkingen in eene reeks te ontwikkelen, die slechts onder de gunstigste omstandigheden kan gesommeerd worden.

De methode van de verhooging der orde dient hoofdzakelijk om de integratie eener niet-herleide lineaire vergelijking onder gunstige omstandigheden tot die eener herleide terug te brengen, en dus de aanvullings-methoden overbodig te maken, of om andere bezwaren, die de toepassing eener methode verhinderen, uit den weg te ruimen; zij speelt dus bijna uitsluitend eene zeer ondergeschikte rol, zoodat zij daarom wel als de minste der genoemde integratie-methoden mag aangemerkt worden.

Wil men de waarde eener methode uitsluitend beoordeelen naar de uitkomsten, die zij heeft opgeleverd, dan zoude de rangorde m. i. aldus worden:

de methode van den integreerenden factor,
die der bepaalde integralen,
de methoden der symbolen,
de methode van Liouville,
die van de scheiding der veranderlijken, en
die van de verhooging der orde [48]).

146. Welke plaats men tusschen deze methoden die der reeksen moet aanwijzen, is moeilijk aan te geven, wijl dit geheel en al afhangt van het doel, dat men door de integratie der differentiaal-vergelijking tracht te bereiken.

---

[48]) Door de ontwikkeling van de methode van den integreerenden factor hebben de Eulersche vormen het recht van bestaan als methode van integratie voor de lineaire vergelijkingen met standvastige coëfficienten verloren Om deze reden hebben wij haar hier niet vermeld.

Geschiedt die integratie met het doel om uit den vorm der bijzondere integralen de eigenschappen der functie of der door haar voorgestelde kromme lijnen af te leiden, dan kan men aan de methoden der reeksen slechts eene geringe waarde toekennen (Zie § 77 en vv.). Heeft die integratie echter plaats met het doel om de getallen-waarde van y te bepalen, die met eene zekere waarde van x overeenkomt, dan staan de reeksen, die genoemde methoden opleveren, in gelijken rang met de integralen in gesloten vorm. Vooreerst toch leenen zij zich in het algemeen zeer goed voor de benadering dier getallen-waarde, en ten tweede is het dikwijls noodzakelijk, dikwijls wenschelijk, voor de bepaling dier waarde uit een gesloten integraal deze vooraf in reeksen te ontwikkelen; en dan heeft de onmiddellijke afleiding veel voor boven de laatste. Worden in dit geval de methoden der reeksen toegepast op de wijze, die wij in § 80 aangaven, dan komt haar onder de integratie-methoden eene eerste plaats toe door de algemeenheid harer toepassing [49]).

Wanneer het niet mogelijk is de integraal eener vergelijking in gesloten vorm te bepalen, neemt men zijne toevlucht tot deze methoden der reeksen (Spitzer, 2e Forts. § 66). Men maakt alsdan nimmer gebruik van het theorema van Taylor, wijl deze methode de omslachtigste is, maar steeds van de methode der onbepaalde coëfficienten, die behalve meerdere algemeenheid en vrijheid in de toepassing mindere omslachtigheid in de bewerking boven de andere voorheeft.

---

[51]) Kon men vooraf bepalen (zooals zulks in zeer bijzondere gevallen mogelijk is; zie Petzval, Bd. I. Formenlehre) welke factoren in de bijzondere integralen eener vergelijking moeten voorkomen, dan zou daardoor de algemeenheid van toepassing van de methoden der reeksen zeer vermeerderd worden.

147. Hiermede hebben wij de voornaamste hoofd-methoden beschouwd (men zie voorts § 208 en vv.); onder degenen, waarover wij zwegen, zijn van het standpunt, waaruit wij de integratie eener differentiaal-vergelijking hebben opgevat, de methode van Kummer en die van het vaststellen van den vorm der algemeene integraal de belangrijkste. Beide methoden zijn echter zoo zeer beperkt in de toepassing, dat wij het niet raadzaam vonden ze onder de voornaamste methoden te rangschikken.

De eerste bestaat in het afleiden van de integraal der vergelijking

$$y^{(n)} = Ax^p y \quad \text{. . . . . (44)}$$

voor positieve of negatieve waarden van p uit die der vergelijking

$$y^{(n+1)} = x^{p-1} y;$$

en kan dan ook alleen op vergelijkingen van dezen vorm worden toegepast (Kummer, Crelle. Bd. XIX; Spitzer, § 50).

Bij de tweede methode wordt eene eindige vergelijking met een zeker aantal nog onbepaalde standvastigen als integraalvergelijking aangenomen, en daarna worden deze standvastigen zoodanig bepaald, dat die vergelijking werkelijk aan de gegeven differentiaal-vergelijking voldoet. Zij kan alleen dan met vrucht worden toegepast, wanneer men uit den aard der differentiaal-vergelijking dien vorm kan opmaken; of wanneer die vorm bepaald kan worden door analogie met andere vergelijkingen; of ook wanneer men weet, dat de differentiaal-vergelijking eene kegelsnede, een cilinder, enz. voorstelt. Bij de lineaire vergelijkingen der eerste orde kan men op deze wijze de berekeningen dikwijls verkorten, vooral wanneer men met eene niet-herleide vergelijking te doen heeft, die in het tweede lid of eene geheele functie van x, of de exponentieele grootheid e^{px}, of een Sinus of een Cosinus in de eerste macht, bijv. *Sin px*

of *Cos px* bevat [50]). Bij de vergelijkingen van hoogere orde is dit echter meer zelden het geval, daar het hierbij veel moeilijker valt eenigen algemeenen regel daarvoor vast te stellen, en het uit den aard der zaak zeldzamer voorkomt, dat men vooraf den vorm der integraal door analogie of uit de vergelijking zelve met eenigen grond kan vermoeden.

B. De aanvullings-methoden.

148. De aanvullings-methoden verschillen zoo geheel en al van de tot hiertoe beschouwde hoofd-methoden zoowel in het doel, dat men bij hare toepassing beoogt, als in den aard dier toepassing zelve, dat zij met die hoofd-methoden niet rechtstreeks kunnen vergeleken worden. In plaats van eene differentiaal-vergelijking van gronds af op te lossen, is haar hoofddoel òf eene verkregen bijzondere integraal eener vergelijking zoodanig te completeeren, dat deze in de algemeene integraal overgaat, òf uit de algemeene (somtijds zelfs uit eene bijzondere) integraal eener nauw verwante vergelijking de algemeene integraal der gegevene op te maken. Zij ondersteunen dus sommige hoofd-methoden, waar deze te kort schieten, geven den gewijzigden vorm aan, dien de integraal bij bepaalde gevallen van uitzondering aanneemt en maken daardoor den werkkring dier hoofd-methoden meer onafhankelijk van bijzondere

[50]) Is bijv. in de vergelijking

$$y' + Ay + X = 0$$

X eene geheele functie van x van den p^{en} graad, dan dan men steeds

$$y_1 = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots\ldots + \pi x^p$$

stellen en α, β, γ, ... π zoodanig bepalen dat y_1 eene bijzondere integraal wordt der vergelijking, waarna men om de algemeene integraal te verkrijgen, bij y_1 slechts de algemeene integraal der herleide vergelijking

$$y' + Ay = 0$$

heeft te voegen. In de overige gevallen voert men in de uitdrukking voor y_1 βe^{px} of $\beta\, Sin\, px + \gamma\, Cos\, px$ in.

omstandigheden, die hare toepassing zouden belemmeren.

149. Merkwaardig is het, dat deze aanvullings-methoden zich over het algemeen volkomener en spoediger hebben ontwikkeld dan de hoofd-methoden zelve; de reden hiervan moet waarschijnlijk worden gezocht in de meerdere eenvoudigheid harer toepassing en in de omstandigheid, dat, toen de behoefte aan dezelve zich deed gevoelen, onderscheidene beroemde wiskundigen de handen aan het werk sloegen om ze op te sporen en te volmaken. Dat zij hierin goed geslaagd zijn, kan uit het volgende blijken.

f. DE VARIATIE DER STANDVASTIGEN.

150. Is

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots\dots\dots + C_n y_n \quad . \; . \; . \quad (6^b)$$

de algemeene integraal der herleide of homogene lineaire differentiaal-vergelijking

$$y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + \dots\dots + X_1 y' + X_0 y = 0, \quad . \; . \; . \quad (6)$$

dan kan men op een oneindig aantal wijzen de standvastigen C_1, C_2, C_3, ... C_n door functiën van x vervangen zoodanig, dat de daardoor verkregen vergelijking de algemeene integraal zal zijn van de niet-herleide vergelijking

$$y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + \dots\dots\dots + X_1 y' + X_0 y = X. \quad . \; . \quad (6^c)$$

Stelt men dus deze algemeene integraal voor door

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + \dots\dots\dots + u_n y_n, \quad . \; . \quad (6^d)$$

en zijn y_1, y_2, y_3, ... y_n als bijzondere integralen der herleide vergelijking (6) bekend, dan heeft men alleen nog u_1, u_2, u_3, ... u_n als zoodanige functiën van x te bepalen, dat door (6^d) aan de niet-herleide vergelijking (6^c) wordt voldaan. De substitutie van (6^d) in deze laatste vergelijking geeft ons echter slechts ééne enkele betrekking tusschen de u's en x, zoodat die u's klaarblijkelijk nog onderworpen kunnen worden aan $(n - 1)$ willekeurige onaf-

hankelijke voorwaarden, die alsdan de overige $(n-1)$ betrekkingen moeten opleveren. Daar de keuze van dit stelsel voorwaarden geheel vrij blijft, kiest men datgene, hetwelk de eerstgenoemde betrekking het meest vereenvoudigt. Dit meest geschikte stelsel zal men verkrijgen, wanneer men onderstelt, dat de waarden van $y', y'', y''', \ldots$ $\ldots y^{(n-1)}$, die men voor de substitutie uit (6^d) moet afleiden in vorm overeenkomen met die, welke men voor dezelfde functiën zoude verkrijgen, ingeval de u's nog willekeurige standvastigen waren en dus niet van x afhingen. Die onderstelling geeft dan $n-1$ betrekkingen van den vorm

$$y_1^{(k-1)} u_1' + y_2^{(k-1)} u_2' + \ldots\ldots\ldots + y_n^{(k-1)} u_n' = 0,$$

waarbij nu nog de betrekking

$$y_1^{(n-1)} u_1' + y_2^{(n-1)} u_2' + \ldots\ldots y_n^{(n-1)} u_n' = X$$

komt als gevolg van de substitutie in de gegeven vergelijking (6).

Uit deze n betrekkingen, die ten opzichte van de onbekenden $u_1', u_2', \ldots. u_n'$ van den eersten graad zijn, volgt nu, wanneer wij de determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \ldots\ldots & y_n \\ y_1' & y_2' \ldots\ldots & y_n' \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

door $\triangle_n$ voorstellen (Baltzer, § 9. 4),

$$u_k' = \frac{X}{\triangle_n} \frac{\partial \triangle_n}{\partial y_k^{(n-1)}},$$

en dus ook

$$u_k = C_k + \int \frac{X}{\triangle_n} \frac{\partial \triangle_n}{\partial y_k^{(n-1)}} dx,$$

waarin C_k eene willekeurige standvastige aanduidt, zoodat de bepaling der onbekende u's tot eene eenvoudige quadratuur is teruggebracht. Voor de algemeene integraal der niet-herleide vergelijking vindt men derhalve

$$y = \sum_1^n y_k \left(C_k + \int \frac{X}{\triangle_n} \frac{\partial \triangle_n}{\partial y_k^{(n-1)}} dx \right),$$

welke naar behooren n willekeurige standvastigen bevat.

151. De hier verklaarde methode, die voor ruim eene eeuw het eerst door Lagrange werd voorgeslagen (Misc. Taur. p. 182; N. Mém. Acad. Berlin, 1775. p. 190) wordt met den karakteristieken naam van de methode van de variatie der standvastigen of van de veranderlijke parameters bestempeld. Behalve dat zij dus eene der oudste integratie-methoden is, is zij ook eene van die, welke het snelst tot ontwikkeling geraakten; en al is zij in den loop dezer eeuw door andere methoden gedeeltelijk verdrongen, toch blijft zij voor ons van het meeste belang, daar zij de toepassing behelst van een beginsel, dat ook in vraagstukken van andere deelen der hoogere wiskunde wordt toegepast.

152. Boven zagen wij, dat door deze methode de algemeene integraal eener niet-herleide lineaire differentiaalvergelijking door eenvoudige quadraturen uit die der overeenkomstige herleide kan worden afgeleid. Maar ook dan, wanneer niet de algemeene integraal, maar slechts een zeker aantal, bijv. m onderling onafhankelijke bijzondere integralen dezer laatste bekend zijn ($m < n$), kan deze methode ons dikwijls de algemeene integraal der nietherleide vergelijking leeren kennen (d'Alembert, Misc. Taur. p. 381). Zijn namelijk $y_1, y_2, \ldots . y_m$ die bijzondere integralen, dan is ook

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots . . + C_m y_m$$

zulk eene bijzondere integraal. Stelt men nu de gezochte algemeene integraal door

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots . . + u_m y_m \quad . \; . \; . \; . \; . \; (91)$$

voor, dan kan men weder $m - 1$ willekeurige onafhankelijke betrekkingen tusschen de m onbekende u's aannemen,

terwijl de substitutie in de gegeven niet-herleide vergelijking de m^e betrekking oplevert. Gaat men hierin geheel analoog te werk met de straks verklaarde handelwijze, dan verkrijgt men $m - 1$ vergelijkingen van den vorm

$$y_1^{(k-1)} u_1' + y_2^{(k-1)} u_2' + \ldots\ldots + y_m^{(k-1)} u_m' = 0,$$

alsmede eene lineaire differentiaal-vergelijking van de $(n - - m)^e$ orde in U, wanneer men

$$y_1^{(m-1)} u_1' + y_2^{(m-1)} u_2' + \ldots\ldots\ldots + y_m^{(m-1)} u_m' = U$$

stelt. De onbekende u's worden derhalve ook hier door eenvoudige quadraturen (Baltzer, § 9. 3 en 4)

$$u_k = C_k + \int \frac{U}{\triangle_m} \frac{\partial \triangle_m}{\partial y_k^{(m-1)}} dx$$

bepaald, maar die bepaling vereischt hierbij de voorafgegane oplossing eener niet-herleide lineaire differentiaal-vergelijking van de $(n - m)^e$ orde in U.

Daar nu in de bijzondere integralen $y_1, y_2, \ldots . y_m$ volgens de gewone onderstelling geene willekeurige standvastigen voorkomen, zal de vergelijking (91) na substitutie van de waarden der u's de algemeene integraal der gegeven vergelijking opleveren. Immers worden bij de berekening dier u's m willekeurige standvastigen ingevoerd, terwijl bovendien de algemeene integraal der differentiaal-vergelijking in U $n - m$ andere willekeurige standvastigen heeft, zoodat de gevonden integraal naar behooren n willekeurige standvastigen zal bevatten.

153. De oplossing der niet-herleide lineaire differentiaal-vergelijking van de $(n - m)^e$ orde in U is dus de eenige zwarigheid, die het vinden dier algemeene integraal in den weg staat: die oplossing is in 't algemeen niet mogelijk, wanneer $m < n - 1$ is en alleen voor $m = n - 1$ algemeen uitvoerbaar (Malmsten, Crelle. Bd. XXXIX. S. 91). Hoe grooter $n - m$ is, hoe meer men in het algemeen gevaar zal loopen, dat de verkregen vergelijking in U moeilijker te integreeren zal zijn dan de gegeven niet-herleide

vergelijking, en hoe minder men in de integratie dezer laatste zal slagen. Toch zijn er gevallen, waarbij de gezochte algemeene integraal zelfs gemakkelijk kan bepaald worden, wanneer slechts ééne enkele bijzondere integraal der herleide vergelijking bekend is, onder anderen dan wanneer de gezochte algemeene integraal is van den vorm

$$y = \{f(x) + \Gamma_n\}\, \Phi(x), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (92^a)$$

waarin $\Phi(x)$ de bekende bijzondere integraal der herleide vergelijking voorstelt. Daar nu

$$y^{(n)} = 0$$

de complementaire functie Γ_n oplevert, zal de eindvergelijking in U, of hier in dit bijzondere geval in u_1, zijn van den vorm

$$u_1^{(n)} = X,$$

zoodat $\Phi(x)\Gamma_n$ de herleide vergelijking identiek nul moet maken. Om nu de betrekkingen te bepalen, die daartoe tusschen de coëfficienten der vergelijking moeten bestaan, nemen wij de lineaire vergelijking der derde orde

$$y''' + X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y = X, \quad \ldots\ldots \quad (92)$$

en

$$y = \Phi(x)\, \Gamma_3$$

voor de bijzondere integraal van de herleide vergelijking

$$y''' + X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y = 0. \quad \ldots\ldots \quad (92^b)$$

Substitueeren wij nu hierin deze waarde van y en nemen wij

$$\Gamma_3 = C_3 x^2 + C_2 x + C_1,$$

dan verkrijgen wij eene vergelijking, die voor alle waarden der C's identiek nul moet zijn; elke der coëfficienten dier C's moet dus ook gelijk nul wezen en dit geeft voor de gezochte betrekkingen:

$$(x^2 \Phi'' + 4x \Phi' + 2\Phi) X_2 + (x\Phi' + 2\Phi)\, x X_1 + \Phi x^2 X_0 + \\ + (x^2 \Phi''' + 6x\Phi'' + 6\Phi') = 0,$$

$$(x\Phi'' + 2\Phi') X_2 + (x\Phi' + \Phi) X_1 + \Phi x X_0 + (x\Phi''' + 3\Phi'') = 0,$$

en $$\Phi'' X_2 + \Phi' X_1 + \Phi X_0 + \Phi''' = 0;$$
waardoor X_2, X_1 en X_0 in de bijzondere integraal Φ en hare differentiaal-quotienten kunnen worden uitgedrukt. Nemen wij $\Phi = x$, om een bijzonder geval na te gaan, dan gaan de gevonden vergelijkingen over in

$$6x X_2 + 3x^2 X_1 + x^3 X_0 + 6 = 0,$$

$$2X_2 + 2x X_1 + x^2 X_0 = 0$$

en $$X_1 + x X_0 = 0,$$

waaruit volgt: $X_0 = -\frac{6}{x^3}$, $X_1 = \frac{6}{x^2}$ en $X_2 = -\frac{3}{x}$.

De vergelijking

$$y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = X, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

of wat hetzelfde is

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = Xx^3,$$

kan dus op bovenstaande wijze geïntegreerd worden, wanneer $y_1 = x$ als eene bijzondere integraal der herleide vergelijking bekend is. De onderstelling, dat

$$y = u_1 x$$

de algemeene integraal is der gegeven vergelijking, geeft dan ook als uitkomst der substitutie

$$x u_1''' = X,$$

derhalve ook

$$u_1 = \int^{(3)} \frac{X}{x} dx^3 + \Gamma_3,$$

en voor de gezochte algemeene integraal

$$y = x \int^{(3)} \frac{X}{x} dx^3 + x \Gamma_3,$$

wat met (92a) volkomen overeenstemt.

Op dezelfde wijze kan men de betrekkingen bepalen,

welke tusschen de coëfficienten der lineaire vergelijking van de vierde of hoogere orde en de bekende bijzondere integraal moeten bestaan om op deze wijze behandeld te kunnen worden [51]). Voor de lineaire vergelijkingen der tweede orde is die bepaling geheel overbodig, daar door de behandelde methode steeds tot de algemeene integraal der niet-herleide vergelijking

$$y'' + X_1 y' + X_0 y = X \quad \ldots\ldots\ldots \quad (94)$$

kan worden besloten ook wanneer slechts ééne bijzondere integraal der herleide vergelijking

$$y'' + X_1 y' + X_0 y = 0$$

bekend is, omdat alsdan de lineaire vergelijking in U slechts tot de eerste orde opklimt.

154. Uit de voorgaande beschouwingen ziet men, dat de methode van de variatie der standvastigen in elk geval tot de algemeene integraal van de algemeene niet-herleide lineaire differentiaal-vergelijking der n^e orde voert, wanneer men n of $n-1$ onafhankelijke bijzondere integralen der herleide vergelijking kent, en voorts dat zij het vinden dier algemeene integraal terugbrengt tot het oplossen eener differentiaal-vergelijking van de $(n-m)^e$ orde, indien slechts m bijzondere integralen der herleide vergelijking bekend zijn. Zij voltooit dus het werk, dat andere methoden bij de integratie der niet-herleide lineaire vergelijkingen nog hadden overgelaten te doen; zij is derhalve eene hulp-methode, die alleen dan van nut is, wanneer door andere, haar vreemde middelen, hare toepassing is mogelijk gemaakt. Haar werkkring strekt zich overigens uit over alle lineaire differentiaal-vergelijkingen, en het is

---

[51]) Evenzoo kan men ook die betrekkingen bepalen voor het geval dat men een ander verband aanneemt tusschen de integralen der herleide en niet-herleide vergelijkingen.

merkwaardig, hoe gemakkelijk zij zich schikt naar de verschillende vormen, waarin die vergelijkingen voorkomen. Een paar voorbeelden zullen deze bewering staven.

155. Nemen wij de herleide lineaire differentiaal-vergelijking met standvastige coëfficienten

$$y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + A_{n-2} y^{(n-2)} + \dots A_1 y' + A_0 y = 0, \quad (95)$$

en laat de équation caractéristique

$$\phi(m) = m^n + A_{n-1} m^{n-1} + A_{n-2} m^{n-2} + \dots + A_1 m + A_0 = 0$$

tot wortels hebben

$m_{k+1}, m_{k+2}, \dots, m_n$ plus nog k gelijke wortels m_1, dan zijn

$$y_1 = e^{m_1 x}, \; y_{k+1} = e^{m_{k+1} x}, y_{k+2} = e^{m_{k+2} x} \dots, y_n = e^{m_n x}$$

$n - k + 1$ bijzondere integralen der gegeven vergelijking.

De natuurlijkste, hoewel niet de meest wetenschappelijke weg om de algemeene integraal der vergelijking te bepalen, is nu van de methode van de variatie der standvastigen gebruik te maken en door middel daarvan de overige $k - 1$ bijzondere integralen af te leiden. Wij behoeven daartoe echter volstrekt niet den boven verklaarden algemeenen weg in te slaan, maar nemen alleen die bijzondere integraal, welke met de gelijke wortels overeenkomt, dus hier $y_1 = Ce^{m_1 x}$; hierin beschouwen wij C als eene nog onbekende functie van x, welke wij tot hiertoe door u voorstelden, en substitueeren alsdan die bijzondere integraal in de gegeven vergelijking (Riemann, S. 99; Moigno, p. 607; Sturm, § 587—590). Die substitutie geeft

$$e^{m_1 x}\left[\phi(m_1)C + \phi'(m_1)C' + \frac{\phi''(m_1)}{1^{2/1}}C'' + \dots + \frac{\phi^{(k-1)}(m_1)}{1^{k-1/1}}C^{(k-1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\phi^{(k)}(m_1)}{1^{k/1}}C^{(k)} + \dots\dots + \frac{\phi^{(n)}(m_1)}{1^{n/1}}C^{(n)}\right] = 0$$

of daar $\phi(m_1) = 0$ k gelijke wortels m_1 heeft en dus $\phi(m_1) = \phi'(m_1) = \phi''(m_1) = \dots\dots = \phi^{(k-1)}(m_1) = 0$ is, na omzetting ook de vergelijking

$$\frac{\Phi^{(n)}(m_1)}{1^{n|1}} C^{(n)} + \ldots\ldots + \frac{\Phi^{(k)}(m_1)}{1^{k|1}} C^{(k)} = 0.$$

Aan deze vergelijking wordt voldaan door $C^{(k)} = 0$ te stellen, daar alsdan ook alle volgende differentiaal-quotienten gelijk nul zijn, en dus ieder term der vergelijking verdwijnt. Uit

$$C^{(k)} = 0$$

volgt echter

$$C = C_1 + C_2\, x + C_3\, x^2 + \ldots + C_k\, x^{k-1},$$

zoodat de bijzondere integraal luidt

$$y_1 = (C_1 + C_2\, x + C_3\, x^2 + \ldots. + C_k\, x^{k-1})\, e^{m_1 x}.$$

Deze bevat k willekeurige standvastigen en geeft dus met de overige $n - k$ bijzondere integralen voor de gezochte algemeene integraal

$$y = (C_1 + C_2\, x + C_3\, x^2 + \ldots + C_k\, x^{k-1})\, e^{m_1 x} +$$
$$+ C_{k+1}\, e^{m_{k+1} x} + \ldots + C_n\, e^{m_n x}.$$

Op volkomen dezelfde wijze handelt men, wanneer de vergelijking $\Phi(m) = 0$ meer dan eene groep gelijke wortels heeft.

156. Als tweede voorbeeld diene het volgende: door toepassing van de bekende eigenschap, dat

$$y = y_1 + Y$$

de algemeene integraal is eener niet-herleide lineaire differentiaal-vergelijking, indien

$$y = y_1$$

eene bijzondere integraal derzelve en

$$y = Y$$

de algemeene integraal der herleide vergelijking voorstelt, kan men zeer gemakkelijk de algemeene integraal der lineaire vergelijking met standvastige coëfficienten

$$y^{(n)} + A_{n-1} y^{(n-1)} + A_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + A_1 y' + A_0 y = X \quad (95^a)$$

bepalen, wanneer X tot eene der drie vormen

$$X = \sum_1^m a_k x_k, \quad X = \sum_1^m [a_k \, Cos \, (m_k x + p) + b_k \, Sin \, (m_k x + p)]$$

of $X = \sum_1^m a_k e^{m_k x}$ behoort (Moigno, p. 626; Duhamel, p. 63; Sturm, p. 125). Is bijv.

$$X = a_1 e^{\alpha_1 x} + a_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots\ldots,$$

dan beschouwt men de gegeven vergelijking als de som der vergelijkingen

$$u^{(n)} + A_{n-1} u^{(n-1)} + A_{n-2} u^{(n-2)} \ldots + A_1 u' + A_0 u = a_1 e^{\alpha_1 x}$$

$$v^{(n)} + A_{n-1} v^{(n-1)} + A_{n-2} v^{(n-2)} + \ldots\ldots + A_1 v' + A_0 v = a_2 e^{\alpha_2 x}$$

...... enz.

en tracht vervolgens de standvastigen C_1, C_2, enz. zoodanig te bepalen, dat

$$u = C_1 e^{\alpha_1 x}, \quad v = C_2 e^{\alpha_2 x}, \ldots\ldots.$$

bijzondere integralen zijn dezer vergelijkingen;

$$y = Y + C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots\ldots$$

is alsdan de gezochte algemeene integraal.

In een enkel geval kan men echter niet op deze wijze te werk gaan, en wel als

$$a_k \, Cos \, (m_k x + p) + b_k \, Sin \, (m_k x + p)$$

of

$$a_k e^{m_k x}$$

bijzondere integralen zijn van de overeenkomstige herleide vergelijking, daar dan de substitutie van

$$C_k \, Cos \, (m_k x + p) + C_l \, Sin \, (m_k x + p)$$

of van

$$C_k e^{m_k x}$$

het eerste lid identiek nul maakt, en het bijgevolg onmogelijk is het gelijk te stellen met het tweede. In dit geval leert de methode van de variatie der standvastigen onmiddellijk de algemeene integraal kennen.

Zij bijv. de differentiaal-vergelijking

$$y^{IV} + 2y''' - 2y' - y = ae^{-x}, \quad \ldots\ldots \quad (96)$$

dan heeft de vergelijking

$$\Phi(m) = m^4 + 2m^3 - 2m - 1 = 0$$

één wortel $m = 1$ en drie wortels $m = -1$, zoodat

$$y = e^x \quad \text{en} \quad y = e^{-x}$$

twee bijzondere integralen zijn der overeenkomstige herleide vergelijking, en dus de gegeven vergelijking in het bovengenoemde geval van uitzondering verkeert. De beschouwde methode leert nu de gezochte algemeene integraal vinden, zonder dat het daartoe noodig is vooraf de integraal der herleide vergelijking aan te vullen. Daartoe beschouwt men in de bijzondere integraal derzelve,

$$y = C\,e^{-x},$$

C afhankelijk van x en substitueert dan deze waarde in die vergelijking, waardoor men verkrijgt

$$e^{-x}\left[\frac{\Phi'''(-1)}{1^{3/1}}C''' + \frac{\Phi^{IV}(-1)}{1^{4/1}}C^{IV}\right] = a\,e^{-x}$$

of wat hetzelfde is

$$C^{IV} - 2\,C''' = a.$$

Hieraan wordt voldaan door

$$-2\,C''' = a,$$

daar alsdan $C^{IV} = 0$ is. Men vindt dus

$$C = -\frac{a}{12}x^3 + \tfrac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3;$$

derhalve voor de algemeene integraal der gegeven vergelijking

$$y = e^{-x}\left(-\frac{a}{12}x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3\right) + C_4 e^x\,,$$

welke naar behooren vier willekeurige standvastigen bevat [52]).

157. Niet alleen wanneer de gevonden bijzondere integralen in een gesloten vorm voorkomen (zie o. a. § 176), maar ook wanneer zij den vorm hebben eener niet-sommeerbare reeks, kan de methode van de variatie der standvastigen worden toegepast. Zoo vonden wij (§ 73) voor de vergelijking

$$x^4 y'' + x^3 y' + y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

de bijzondere integraal

$$y_1 = 1 - (2 \,.\, x)^{-2} + (2 \,.\, 4 \,.\, x^2)^{-2} - (2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, x^3)^{-2} + \ldots\ldots$$

Door nu in de vergelijking

$$y = C\, y_1$$

C als eene functie van x te beschouwen, vindt men voor de algemeene integraal

$$y = y_1 \left(C_1 + C_2 \int \frac{dx}{x y_1^2} \right).$$

Nu is echter

$$\int \frac{dx}{x y_1^2} = \int \frac{dx}{x} \left(1 + \frac{b_1}{x^2} + \frac{b_2}{x^4} + \frac{b_3}{x^6} + \ldots \right),$$

waarin b_1, b_2, b_3, ... gemakkelijk te bepalen getallen-coëfficienten voorstellen; voor de gezochte algemeene integraal heeft men derhalve

$$y = [1 - (2.x)^{-2} + (2 \,.\, 4 \,.\, x^2)^{-2} - (2.4.6.x^3)^{-2} + \ldots] \Big[C_1 - $$
$$- C_2 \left(lx - \frac{b_1}{2x^2} - \frac{b_2}{4x^4} - \frac{b_3}{6x^6} - \ldots \right) \Big].$$

158. Komen in de lineaire differentiaal-vergelijking y

[52]) Vergelijk hiermede de onwetenschappelijke behandeling van Cournot, p. 240; alsmede de handelwijzen van Moigno, p. 628; Sturm, p. 127; en anderen.

en de eerste $k-1$ differentiaal-quotienten $y', y'', \ldots.. y^{(k-1)}$ niet voor, dan kan men klaarblijkelijk uit de $(n-k)^e$ integraal der herleide vergelijking tot de $(n-k)^e$ integraal der niet-herleide vergelijking besluiten door $y^{(k)}$ als nieuwe afhankelijk veranderlijke in beide in te voeren (zie § 13). Zoo wordt bijv. de vergelijking

$$y^{(n)} - \frac{y^{(n-1)}}{x+1} = F(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (97)$$

aldus behandeld. Uit de herleide vergelijking vindt men

$$y^{(n-1)} = C\,(x+1);$$

deze waarde voor veranderlijke C in de gegeven vergelijking gesubstitueerd, geeft

$$C' = \frac{F(x)}{x+1},$$

en dus

$$C = C_n + \int \frac{F(x)}{x+1}\,dx$$

en

$$y^{(n-1)} = (x+1)\left(C_n + \int \frac{F(x)}{x+1}\,dx\right)$$

bijgevolg ook

$$y = \int^{(n-1)} (x+1)\left(C_n + \int \frac{F(x)}{x+1}\,dx\right) dx^{n-1} + \Gamma_{(n-1)}.$$

159. Uit de voorgaande voorbeelden ziet men, dat de methode van de variatie der standvastigen zich gemakkelijk leent tot de behandeling van die gevallen van uitzondering bij de lineaire differentiaal-vergelijkingen, die de toepassing van andere methoden onmogelijk maken. De uitgebreide toepassing en het hooge gewicht dier methode zijn dan ook waarschijnlijk de redenen, dat zij onder zeer verschillende vormen voorkomt. Wij hebben bijv. gezien, dat, wanneer van de herleide lineaire vergelijking (6) ééne bijzondere integraal

$$y = C_1 y_1$$

bekend is, de oplossing der niet-herleide vergelijking (6c) en dus ook die der herleide kan worden teruggebracht tot de integratie eener lineaire vergelijking in U van de $(n-1)^e$ orde, door C_1 als eene van x afhankelijke functie te beschouwen. Hierin is alsdan

$$U = y_1 \frac{dC_1}{dx},$$

en dus $C_1 = \int \frac{U}{y_1} dx$, zoodat de substitutie van

$$y = y_1 \int z dx$$

onmiddellijk tot dezelfde verlaging moet voeren en niets anders is dan eene samenvoeging van de beide bewerkingen, welke de methode van de variatie der standvastigen vereischt. Deze substitutie wordt nu echter niet in dien zin beschouwd, maar als eene afzonderlijke methode behandeld (Moigno, § 226—8 en § 237; Sturm, § 600) en als zoodanig uitgebreid voor het geval, dat er twee of meer bijzondere integralen der herleide vergelijking gevonden zijn. Is er bijv. ook een tweede bijzondere integraal

$$y = y_2$$

bekend, dan moet ook

$$y_2 = y_1 \int z_1 dx,$$

of wat hetzelfde is

$$z_1 = d_x \frac{y_2}{y_1},$$

zijn; zoodat dan ook eene bijzondere integraal van de verkregen vergelijking van de $(n-1)^e$ orde bekend is, en men derhalve de verlaging kan voortzetten door te stellen

$$z = z_1 \int v dx$$

enz.

160. Deze samenvatting der beide substituties heeft ontegenzeggelijk een groot voordeel, wanneer slechts enkele

van nul verschillende bijzondere integralen bekend zijn; maar zij is in den regel veel omslachtiger, wanneer al de bijzondere integralen der herleide vergelijking gegeven zijn, doordat hierbij de verlaging der orde na elke substitutie slechts éêne eenheid bedraagt, en er dus n achtereenvolgende substituties noodig zijn om de begeerde algemeene integraal der niet-herleide vergelijking te bepalen.

Bij vergelijkingen der tweede orde is zij, om der kortheidwille echter steeds boven de voorgaande handelwijze te verkiezen. Wordt bijv. gevraagd de algemeene integraal der vergelijking

$$y'' + X_1 y' + X_0 y = X \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (94)$$

te bepalen, indien y_1 als bijzondere integraal der overeenkomstige herleide vergelijking gegeven is, dan voert de substitutie van

$$y = y_1 \int z dx$$

tot de lineaire vergelijking der eerste orde

$$y_1 z' + (X_1 y_1 + 2 y_1') z = X,$$

die onmiddellijk kan worden opgelost, en dus de gezochte integraal leert vinden.

Was nu bovendien y_2 als tweede bijzondere integraal der herleide vergelijking bekend, dan zou de substitutie van

$$z = z_1 \int v dx,$$

waarin $z_1 = d_x \dfrac{y_2}{y_1}$ is, de vergelijking geven

$$v = \frac{X}{y_1 z_1},$$

zoodat men voor de algemeene integraal vindt

$$y = y_1 \int z_1 dx \int \frac{X dx}{y_1 z_1},$$

waarin twee willekeurige standvastigen der integratie voorkomen.

Op volkomen analoge wijze kan men de algemeene in-

tegraal eener niet-herleide lineaire vergelijking der n^e orde brengen in den vorm

$$y = y_1 \int z_1 dx \int v_1 dx \ldots\ldots\ldots \int u_1 dx \int \frac{X dx}{y_1 z_1 v_1 \ldots\ldots u_1},$$

dat wil zeggen: kan men die algemeene integraal bepalen door middel eener veelvoudige integraal uit de bijzondere integralen van n herleide lineaire vergelijkingen, die achtereenvolgens tot de n^e, $(n-1)^e$, ... 1^e orde afdalen (Moigno, p. 566).

In dezen laatsten vorm wordt echter de methode van de variatie der standvastigen zelden toegepast; zelfs bij de meest eenvoudige lineaire vergelijkingen, die met standvastige coëfficienten, is deze nieuwe wijziging omslachtig in het gebruik; uit een theoretisch oogpunt beschouwd, heeft zij echter hierbij iets voor boven de oorspronkelijke handelwijze, daar zij door eene geringe wijziging onmiddellijk de integraal der niet-herleide vergelijking leert kennen. Stelt men namelijk achtereenvolgens

$$y = e^{\alpha_1 x} \int z dx,$$

$$z = e^{\alpha_2 x} \int v dx,$$

enz., dan zal de voortdurende verlaging der orde, die door α_1, α_2, ... verkregen wordt, rechtstreeks tot de gezochte integraal voeren. Het voordeel dezer oplossing is echter alleen zuiver theoretisch, en heeft voor de practijk volstrekt geene waarde, daar zij alleen door verdeeling van den arbeid van de handelwijze, in § 150 verklaard, onderscheiden is (zie Moigno, p. 590).

161. Ook eene andere methode, die vooral van belang is bij de oplossing van de lineaire vergelijkingen der eerste orde, maar ook hare toepassing vindt bij die van de tweede en hoogere orde, kunnen wij tot de methode van de variatie der standvastigen terugbrengen. Wij hebben hier het oog op de methode, waarbij men de afhankelijk

veranderlijke door twee nieuwe afhankelijk veranderlijken vervangt (Lacroix, l. c. p. 187). Deze handelwijze komt volkomen met de methode van de variatie der standvastigen overeen, wanneer men vooraf slechts opmerkt, dat eene der beide nieuwe veranderlijken de bijzondere integraal der herleide vergelijking voorstelt.

162. Tot hiertoe beschouwden wij alleen lineaire differentiaal-vergelijkingen en uit die beschouwing is ons gebleken, dat de werkkring van de methode van de variatie der standvastigen zich over alle zoodanige vergelijkingen uitstrekt, indien men namelijk, óf de algemeene integraal der herleide vergelijking, óf $n - 1$ harer bijzondere integralen kent. Maar ook bij niet-lineaire differentiaal-vergelijkingen kan zij worden toegepast, hoewel men alsdan niet zoo gemakkelijk tot het doel, de algemeene integraal, geraakt.

Men verkrijgt alsdan een stelsel differentiaal-vergelijkingen, waaruit men de verlangde u's (§ 150) moet oplossen, in welke echter niet alleen de differentiaal-quotienten van u in de eerste macht, maar in 't algemeen ook producten dier u's of machten en producten dier differentiaal-quotienten kunnen voorkomen. Overigens gaat men hierbij evenzoo te werk als bij de lineaire vergelijkingen: men laat in de gegeven vergelijking vooreerst die termen weg, welke de onmiddellijke toepassing van de eene of andere hoofd-methode verhinderen; vervolgens integreert men de daardoor verkregen herleide vergelijking; en nu wordt aan de integraal der oorspronkelijke vergelijking denzelfden vorm toegekend als aan die der aangenomene, met dit onderscheid, dat men de willekeurige standvastigen, die in deze laatste voorkomen, als nog onbekende functiën van x aanziet, welke door de substitutie moeten worden bepaald.

De niet-lineaire vergelijking kan hierbij van dien aard zijn, dat het verkieslijk is om in plaats van eene bijzondere of de algemeene integraal der herleide vergelijking

hare eerste, tweede, ... integraal te nemen en aan de eerste, tweede, ... integraal der oorspronkelijke vergelijking denzelfden vorm toe te schrijven, en zoodoende deze te bepalen (§ 158).

Neemt men bijv. de reeds meermalen vermelde vergelijking van Liouville (§ 22; Moigno, p. 672)

$$y'' + Yy'^2 + Xy' = 0; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

was deze eenvoudig

$$y'' + Xy' = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14^a)$$

dan zou de eerste integratie zeer eenvoudig zijn en geven

$$y' = C\, e^{-\int X dx};$$

zonder nu hieruit de waarde van y af te leiden, beproeve men of aan de oorspronkelijke vergelijking door de gevonden waarde van y' kan worden voldaan, wanneer men C als eene nog onbekende functie van x beschouwt. In die onderstelling geeft de substitutie dezer waarde van y' in de vergelijking (14)

$$C' + Y\, C^2 e^{-\int X dx} = 0,$$

waarvoor men kan schrijven

$$\left(\frac{dC}{dy} + YC\right) y' = 0.$$

Daar nu y' in 't algemeen van nul verschilt, moet de factor tusschen de haakjes nul zijn, dus

$$\frac{dC}{dy} + YC = 0,$$

waaruit volgt

$$C = C_1\, e^{-\int Y dy};$$

zoodat men vindt

$$y' = C_1\, e^{-\int Y dy}\, e^{-\int X dx}$$

voor de eerste integraal der beschouwde vergelijking; enz. zie § 36.

In dit voorbeeld was de herleide vergelijking (14a) li-

neair en het is duidelijk, dat men langs den gemakkelijksten weg tot eene uitkomst zal geraken, wanneer het deel der vergelijking, dat men aanvankelijk beschouwt, lineair is. Die lineariteit is echter geenszins een noodzakelijk vereischte voor het welslagen der integratie, zooals blijkt, wanneer men van de vorige vergelijking (14)

$$y'' + Yy'^2 = 0$$

als de herleide vergelijking aanmerkt. Hieruit toch volgt

$$\frac{dy'}{y'} + Ydy = 0,$$

en dus ook

$$y' = C\, e^{-\int Ydy}.$$

Op dezelfde wijze als straks te werk gaande geeft de substitutie

$$\frac{C'}{C} + X = 0,$$

bijgevolg

$$C = C_1\, e^{-\int Xdx},$$

en voor de eerste integraal

$$y' = C_1\, e^{-\int Xdx}\, e^{-\int Ydy},$$

even als boven.

163. Ook de vergelijking van de derde orde

$$y''' + Xy'' + Yy''\, y' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (98)$$

kan op deze beide wijzen behandeld worden: neemt men

$$y''' + Yy''\, y' = 0,$$

dan kan men daarvoor schrijven

$$\frac{dy''}{y''} + Ydy = 0,$$

waaruit volgt

$$y'' = C\, e^{-\int Ydy}.$$

Verder geeft de substitutie dezer waarde, in de onderstelling dat C van x afhangt, in de gegeven vergelijking

$$C' + XC = 0,$$

derhalve ook

$$C = C_1 \, e^{-\int X dx},$$

en voor de eerste integraal der genoemde vergelijking

$$y'' = C_1 \, e^{-\int X dx} \, e^{-\int Y dy}.$$

Had men de lineaire vergelijking

$$y''' + Xy'' = 0$$

als de herleide aangezien, dan zoude men dezelfde uitkomst hebben verkregen.

164. In § 91 hebben wij gezien, hoe men soms door de eenvoudige substitutie $y = e^{mx}$ één of meer bijzondere integralen eener niet-lineaire homogene vergelijking der tweede soort kan bepalen. Tevens hebben wij daarbij er op gewezen, hoe de methode van de variatie der standvastigen in dat geval kan dienen om de zoo verkregen integraal aan te vullen. Zoo leverde bijv. de bovengenoemde substitutie voor de vergelijking

$$yy'' - 2y'^2 + y^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (51)$$

de bijzondere integralen

$$y_1 = e^x \quad \text{en} \quad y_2 = e^{-x};$$

substitueert men nu de waarde

$$y = C_1 \, e^x + C_2 \, e^{-x},$$

in de onderstelling dat C_1 en C_2 van x afhangen, in de vergelijking (51), op dezelfde wijze als zulks in § 152 bij lineaire vergelijkingen is geschied, dan verkrijgt men, behalve de voorwaarde

$$C_1' \, e^x + C_2' \, e^{-x} = 0,$$

als uitkomst der substitutie

$$4C_1 \, C_2 - C_1 \, C_2' + C_1' \, C_2 = 0;$$

en uit deze beide voorwaardens-vergelijkingen volgt nu na eene gemakkelijke integratie

$$C_1 = C_4 \, (1 + C_3 \, e^{2x})^{-2}$$

en $$C_2 = C_3\, C_4\, e^{4x}\,(1 + C_3\, e^{2x})^{-2};$$

en dus ook voor de gezochte algemeene integraal

$$y = C_4\, e^x\,(1 + C_3\, e^{2x})^{-1}.$$

Op volkomen analoge wijze vindt men $y = e^x$ als bijzondere integraal van de vergelijking

$$y'\, y'' - yy'' - xy'^2 + xyy' = 0 \ldots\ldots\ldots (99)$$

De substitutie van $y = C\, e^x$ voert nu hierbij onmiddellijk tot de vergelijking

$$C'' + (2 - x)\, C' + (1 - x)\, C = 0,$$

welke terstond geeft

$$C = e^{-x}\,(C_2 + C_1 \int e^{\frac{1}{2}x^2}\, dx);$$

zoodat men voor de algemeene integraal vindt

$$y = C_2 + C_1 \int e^{\frac{1}{2}x^2}\, dx.$$

165. In verreweg de meeste gevallen voeren echter de voorwaardens-vergelijkingen bij zulke niet-lineaire vergelijkingen tot een stelsel vergelijkingen, dat moeilijker te integreeren is dan de oorspronkelijke vergelijking zelve. In enkele gevallen kan men echter die meerdere ingewikkeldheid voorkomen door aan de onderstelde algemeene integraal een bepaalden vorm te geven: zoo is bijv.

$$y = \sqrt{2\, lx}$$

eene bijzondere integraal van de vergelijking

$$xyy'' + xy'^2 + yy' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (100)$$

(een bijzonder geval van de vergelijking (14)); door nu

$$y = \sqrt{2\, C\, lx}$$

als de algemeene integraal te beschouwen, komt men tot de lineaire vergelijking

$$C'' + \frac{2 + lx}{lx}\, C' = 0;$$

terwijl daarentegen de onderstelling

$$y = C\sqrt{2\, lx}$$

tot eene niet-lineaire vergelijking zou gevoerd hebben.

166. Alleen van eene differentiaal-vergelijking der tweede orde, die niet-lineair is en waarvan men op de eene of andere wijze ééne bijzondere integraal heeft gevonden, kan men zeggen, dat haar algemeene integraal dikwijls door de methode van de variatie der standvastigen kan worden bepaald. Is echter geene enkele bijzondere integraal bekend van zulk eene niet-lineaire, niet-homogene vergelijking der tweede orde, die niet tot eene der vroeger besproken vormen (§ 13) behoort, en waarin dus geene der grootheden x, y of y' ontbreekt, zoo heeft men slechts weinige hulpmiddelen voor hare integratie. Het naast ligt natuurlijk voor de hand om door de substitutie van nieuwe veranderlijken de vergelijking tot eene der zoo even genoemde vormen terug te brengen, en om hierbij talrijke proefnemingen te ontgaan en zoo spoedig mogelijk de meest voordeelige substitutie te vinden, kan men zich dan nog in enkele gevallen van de methode van de variatie der standvastigen bedienen.

167. Uit het voorafgaande volgt, dat de methode van de variatie der standvastigen ook bij de integratie der niet-lineaire differentiaal-vergelijkingen goede diensten bewijst, hoewel haar werkkring daarbij veel meer beperkt is dan bij de lineaire vergelijkingen, daar zij bij deze als eene algemeene methode kan worden beschouwd, terwijl zij bij de niet-lineaire vergelijkingen slechts bij uitzondering kan worden toegepast. Ook bij deze niet-lineaire vergelijkingen is men blijkbaar altijd gerechtigd om te trachten tot eene oplossing te komen door de afhankelijk veranderlijke te vervangen door eene nieuwe of ook door een stelsel nieuwe veranderlijken, die men aan een bepaald aantal voorwaarden bindt, maar niet altijd zal de vergelijking, die als uitkomst dezer substitutie de plaats der oorspronkelijke vergelijking inneemt, gemakkelijker te integreeren zijn dan deze.

168. Deze toepassing op de niet-lineaire vergelijkingen heeft de methode van de variatie der standvastigen voor boven elke andere aanvullings-methode. Zij is bovendien de eenige dezer methoden, die een tweeledig döel beoogt: de integraal eener differentiaal-vergelijking aan te vullen en die integraal uit de integraal eener analoge vergelijking af te leiden.

Het eerste doel heeft zij o. a. met de methode van d'Alembert gemeen, die wij thans, in verband met haar, nader zullen beschouwen.

g. DE METHODE VAN D'ALEMBERT.

169. Onder de methoden, welke men bezigt om de integraal eener herleide lineaire differentiaal-vergelijking aan te vullen, ingeval de aangewende methode tot hare volledige integratie te kort schiet, bekleedt de methode van d'Alembert [53]) eene voorname plaats, zoowel om de eenvoudigheid van toepassing, als om den spoed, waarmede zij tot het doel voert; om die redenen wordt dan ook deze methode in elk werk over differentiaal-vergelijkingen min of meer uitvoerig beschreven. Toch hebben wij haar in § 85 gerangschikt onder de kunstgrepen, waardoor men de onvolkomenheid der theorie moest verhelpen en zoo mogelijk bedekken, en wij gelooven, dat een enkele vluchtige blik voldoende is, om die rangschikking te rechtvaardigen.

Reeds de onderstelling, dat de gelijke wortels der équation caractéristique ongelijk en veranderlijk zijn, sluit iets ongerijmds in zich; maar meer nog dan ten gevolge van die eenigzins absurde onderstelling verliest deze methode alle theoretische waarde door de vormen $0 . \infty, \infty - \infty$, enz., die bij hare toepassing voorkomen. Door à posterioristische bewerkingen en andere zuiver theoretische methoden over-

[53]) J. le Rond d'Alembert, Opuscules mathématiques. Paris, David. 1761. T. 1.

tuigd zijnde van de juistheid harer uitkomsten, laat men echter meestal gaarne hare theoretische waarde voor wat zij is, om de groote practische voordeelen, die de methode ons aanbiedt. Geene enkele der methoden, die haar kan vervangen, voert zoo spoedig tot het doel, als zij; geene enkele helpt zoo gemakkelijk de bezwaren overwinnen, welke onder bijzondere omstandigheden de gewone toepassing eener hoofd-methode in den weg staan; of leidt zoo eenvoudig voor zekere bijzondere waarden van de standvastige coëfficienten der vergelijking, die een anderen vorm voor de integraal medebrengen, de algemeene integraal af uit haren algemeenen vorm, als juist deze ontheoretische methode van d'Alembert; zoodat men haar met alle recht als eene der voornaamste aanvullings-methoden aanmerkt.

Hare uitgebreide toepassing zal het dan ook billijken, dat wij haar hier nader beschouwen in verband met de voorgaande methode; daarbij moeten wij voornamelijk het oog vestigen op de beginselen, waarop beide methoden steunen; op den arbeid, dien hare toepassing vereischt; en op de meerdere of mindere algemeenheid dier toepassing zelve.

170. Letten wij dan vooreerst op de beginselen, waarop de genoemde methoden steunen. Bij de methode van de variatie der standvastigen beschouwt men de bijzondere integraal

$$y = C_k y_k,$$

waarin zich de twee of meer schijnbaar gelijke hebben opgelost, terecht als eene uit zooveel enkelvoudige samengestelde bijzondere integraal; en onderstelt daarbij alleen, dat deze enkelvoudige integralen alle y_k tot factor hebben en tot tweeden factor eene functie van x, welke laatste in de willekeurige standvastige C_k zijn opgelost. Door die onderstelling wordt C_k zelve van x afhankelijk en neemt zij den vorm aan van $B_k f(x)$, waarin B_k eene nieuwe willekeurige standvastige voorstelt. De factor $f(x)$ wordt nu

door substitutie in de gegeven differentiaal-vergelijking bepaald. Door deze substitutie wordt daarbij de gegrondheid der genoemde onderstelling aangetoond; — deze onderstelling lag uit den aard der zaak voor de hand en is alleszins gewettigd, omdat elke bijzondere integraal eener differentiaal-vergelijking eene functie zijnde van x, als het product van twee functiën van x mag worden beschouwd, waarvan de eene als bekend wordt ondersteld.

Het beginsel, waarop de methode van de variatie der standvastigen berust, moge dus niet zuiver wetenschappelijk zijn, omdat men daarbij tot eene, hoezeer geoorloofde onderstelling zijne toevlucht neemt; het is uit de natuur der bijzondere integralen afgeleid, en in zoover dan toch door de wetenschap aangegeven, en bevat dan ook geene enkele ongerijmdheid, die aanleiding geeft om de toepassing er van, of m. a. w. de uitkomsten door de methode verkregen, te wantrouwen.

171. De methode van d'Alembert steunt daarentegen op een beginsel, dat geheel en al buiten de theorie der differentiaal-vergelijkingen ligt, en bijgevolg ook niet uit den aard der bijzondere integralen kan worden afgeleid. Lossen twee (of meer) bijzondere integralen

$$y_1 = F_1(x, a) \quad \text{en} \quad y_2 = F_2(x, b)$$

zich op in eene enkele

$$y = F_1(x, m),$$

en is dit verschijnsel een gevolg daarvan, dat men aan eene der standvastige coëfficienten der differentiaal-vergelijking eene bijzondere waarde m toekent, dan neemt men

$$y_1 = F_1(x, m) \quad \text{en} \quad y_2 = Grens\, F_2(x, m + \delta),$$

voor $Grens\ \delta = 0$, beide als bijzondere integralen der vergelijking aan; waarbij natuurlijk F_2 voor $\delta = 0$ niet ondoorloopend mag worden. Men onderstelt dus, dat deze beide integralen verschillen en beide aan de vergelijking voldoen. Daarbij substitueert men derhalve in ééne der

gelijk wordende bijzondere integralen voor den genoemden standvastigen coëfficient der vergelijking onmiddellijk zijne bijzondere waarde, en laat die standvastige daarentegen bij de overige eene veranderlijke waarde aannemen, die tot de genoemde bijzondere waarde convergeert.

Is het schijnbaar gelijk zijn der bijzondere integralen een gevolg van het gelijk zijn van twee of meer wortels der équation caractéristique, bijv. van

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ \ldots\ldots m_k+1,$$

dan beschouwt men deze wortels als ongelijk en op één na als veranderlijk

$$m_1,\ m_1+\delta_1,\ m_1+\delta_2,\ \ldots\ldots m_1+\delta_k;$$

stel nu dat de som der uitkomsten, die de achtereenvolgende substituties dezer waarden opleveren, zij

$$y=y_1\left[C_0+C_1 F_1(x,\delta_1)+C_2 F_1(x,\delta_2)+\ldots+C_k F_1(x,\delta_k)\right],$$

dan ontwikkelt men de verschillende F in reeksen, om alsdan tot de grenzen $\delta_1=\delta_2=\ldots=\delta_k=0$ over te gaan.

Bij deze methode van d'Alembert geeft men dus in de algemeene integraal eener differentiaal-vergelijking aan dezelfde standvastige twee of meer verschillende waarden, waarvan de eene „standvastig", de overige daarentegen veranderlijk zijn, maar tot die standvastige waarde convergeeren. Deze ongerijmde en à priori door niets gewettigde handelwijze zou nog in verreweg het meest voorkomende geval, de gelijkheid van de wortels der équation caractéristique, tot niets voeren, indien men niet vooraf met de uitkomst bekend ware. Men ontwikkelt namelijk $F_1(x,\delta_1)$, $F_1(x,\delta_2)$, enz. in reeksen, waardoor men eene vergelijking verkrijgt van den vorm

$$y_1=y\Big[\sum_0^k C_k+f(x)\sum_1^k C_k\delta_k+f(x)^2\sum_1^k C_k\delta_k^2+\ldots$$
$$\ldots+f(x)^3\sum_1^k C_k\delta_k^3+\ldots+f(x)^{k-1}\sum_1^k C_k\delta_k^{k-1}+$$
$$+f(x)^k\varphi(x)\sum_1^k C_k\delta_k^k\Big],$$

en door de bekende uitkomst geleid, stelt men nu hierin $\sum_0^k C_k = B_0$, $\sum_1^k C_k \delta_k = B_1$, enz. tot $\sum_1^k C_k \delta_k^k = B_k$; waarbij B_0, B_1, ... B_k weder als eindige en willekeurige standvastigen worden beschouwd, zonder dat men er zich om bekreunt, dat door den daaropvolgenden grensovergang de oorspronkelijke, ook als eindige willekeurige standvastigen beschouwde, C's oneindige waarden bekomen van de eerste tot en met de k^e orde.

Zoowel de ongerijmdheid, die in het beginsel, waarop de methode berust, ligt opgesloten, als die, welke de toepassing van dit beginsel, als een gevolg van deze eerste, medebrengt, geven ons wettige reden om de uitkomsten van deze methode te wantrouwen; in dit opzicht staat dan ook deze methode verre achter bij die van de variatie der standvastigen. Terwijl deze laatste steunt op een beginsel, dat ook bij vraagstukken op andere deelen der wiskunde betrekking hebbende, menigvuldig wordt toegepast, en dus van het hoogste belang is voor de wetenschap zelve, mist de methode van d'Alembert alle theoretische waarde en beschouwt men haar gewoonlijk als eene kunstgreep, die geöorloofd is, in zoover andere methoden hare uitkomsten hebben bevestigd, of deze à posteriori als geldig zijn erkend.

172. Voor den practischen man is het echter onverschillig of de methode, die hij aanwendt, op een theoretisch of op een ongerijmd beginsel berust, indien slechts de uitkomsten, die de toepassing dier methode hem oplevert, blijken proefhoudend te zijn. Hij kent slechts twee hoofdpunten van vergelijking voor de verschillende aanvullingsmethoden: de algemeenheid harer toepassing en den arbeid, dien deze toepassing vereischt. Kan hij de algemeene integraal eener vergelijking door verschillende methoden bepalen, zoo beslist alleen de arbeid, dien hij daarbij heeft te verrichten, zijne keuze. Van deze zuiver practische zijde zullen wij daarom thans bovenstaande methoden vergelij-

ken. Zijn eenige (k) wortels der équation caractéristique van eene herleide lineaire vergelijking met standvastige coëfficienten gelijk, dan vereischt de methode van de variatie der standvastigen de substitutie van de verkregen bijzondere integraal

$$y = C_k y_k$$

in de gegeven differentiaal-vergelijking, waarbij dan C_k als van x afhankelijk wordt beschouwd. Hierdoor verkrijgt men eene differentiaal-vergelijking der n^e orde, van den vorm

$$A_n C^{(n)} + A_{n-1} C^{(n-1)} + \ldots\ldots + A_k C^{(k)} = 0,$$

waarvan men echter alleen eene bijzondere integraal met k willekeurige standvastigen noodig heeft. Het ligt nu voor de hand om voor de bepaling dier integraal

$$C^{(k)} = 0$$

te stellen, wat klaarblijkelijk aan de voorgaande vergelijking voldoet en de gezochte bijzondere integraal oplevert.

Bij de methode van d'Alembert schrijft men de functiën $F_1(x.\delta_1)$, $F_1(x.\delta_2)$, ..., in den vorm van exponentiele uitdrukkingen $e^{lF_1(x.\delta_1)}$, $e^{lF_1(x.\delta_2)}$, ..., vervangt deze door den bekenden reeksen-vorm, en gaat dan op eene bijzondere, zeer eenvoudige wijze tot $grens\ \delta_1 = Grens\ \delta_2 = \ldots = 0$ over.

De substitutie, die bij de methode van de variatie der standvastigen voorkomt, wordt dus bij die van d'Alembert door een eenvoudigen grensovergang vervangen, zoodat deze laatste methode in kortheid van bewerking boven de eerste staat.

173. Is bijv. gegeven de differentiaal-vergelijking

$$y^{IV} - 2y''' + 2y' - y = 0, \ldots\ldots \quad (101)$$

dan vindt men voor de équation caractéristique

$$m^4 - 2m^3 + 2m - 1 = 0,$$

waarvoor men kan schrijven

$$(m-1)^3(m+1)=0;$$

zoodat

$$y = C_1 e^x \quad \text{en} \quad y = C_2 e^{-x}$$

twee bijzondere integralen der gegeven vergelijking zijn. Omdat drie waarden van m gelijk zijn aan 1, beschouwt men nu

$$y = C_1 e^x$$

als eene drievoudige bijzondere integraal, en substitueert hare waarde, in de onderstelling, dat C_1 van x afhangt, in de gegeven differentiaal-vergelijking, waardoor men achtereenvolgens vindt

$$y = C_1 e^x,$$

$$y' = C_1' e^x + C_1 e^x,$$

$$y'' = C_1'' e^x + 2 C_1' e^x + C_1 e^x,$$

$$y''' = C_1''' e^x + 3 C_1'' e^x + 3 C_1' e^x + C_1 e^x$$

en $$y^{IV} = C_1^{IV} e^x + 4 C_1''' e^x + 6 C_1'' e^x + 4 C_1' e^x + C_1 e^x;$$

en na substitutie en deeling door e^x,

$$C_1^{IV} + 2 C_1''' = 0.$$

Hierin stelt men nu

$$C_1''' = 0,$$

waaruit volgt

$$C_1 = C_3 + C_4 x + C_5 x^2,$$

en dus voor de algemeene integraal

$$y = (C_3 + C_4 x + C_5 x^2) e^x + C_2 e^{-x}.$$

Past men in het voorgaande geval de methode van d'Alembert toe, dan loopt het werk spoediger af. Men schrijft namelijk onmiddellijk de algemeene integraal in den vorm

$$y = C_2 e^{-x} + C_1 e^x + C_3 e^{(1+\delta_1)x} + C_4 e^{(1+\delta_2)x},$$

of wat hetzelfde is

$$y = C_2 e^{-x} + e^x \left(C_1 + C_3 e^{\delta_1 x} + C_4 e^{\delta_2 x}\right)$$

en ontwikkelt nu den vorm tusschen de haakjes in eene reeks, die naar de opklimmende machten van x is gerangschikt, waardoor men verkrijgt

$$y = C_2 e^{-x} + e^x [(C_1 + C_3 + C_4) + (C_3 \delta_1 + C_4 \delta_2) x + + \tfrac{1}{2} (C_3 \delta_1^2 + C_4 \delta_2^2) x^2 + R_1 \delta_1^3 + R_2 \delta_2^3].$$

Hierin stelt men nu

$$C_1 + C_3 + C_4 = C_5,$$

$$C_3 \delta_1 + C_4 \delta_2 = C_6$$

en

$$\tfrac{1}{2} (C_3 \delta_1^2 + C_4 \delta_2^2) = C_7;$$

en gaat daarna tot de grens over, waardoor men voor de algemeene integraal vindt

$$y = C_2 e^{-x} + e^x (C_5 + C_6 x + C_7 x^2),$$

evenals boven.

174. Hoe ingewikkelder de coëfficienten der gegeven differentiaal-vergelijking zijn, hoe meer het uitkomt, dat de methode van d'Alembert spoediger tot het doel voert dan die van de variatie der standvastigen. Moet bijv. de algemeene integraal bepaald worden van de vergelijking

$$(x + a)^3 y''' + 3 (x + a)^2 y'' - 2 (x + a) y' + 2y = 0, \quad . \; . \quad (102)$$

dan vindt men door de substitutie van

$$y = (x + a)^m$$

ter bepaling van m de vergelijking

$$m^3 - 3m + 2 = 0,$$

of wat hetzelfde is

$$(m - 1)^2 (m + 2) = 0;$$

zoodat $m = 1$, $= 1$ en $= -2$ aan de vergelijking voldoen.

Volgens de methode van d'Alembert heeft men nu voor de algemeene integraal

$$y = C_1 (x + a)^{-2} + (x + a) [C_2 + C_3 (x + a)^\delta]$$

voor *Grens* $\delta = 0$. Voordat men tot die grenswaarde overgaat, schrijft men haar in den vorm

$$y = C_1 (x + a)^{-2} + (x + a) [C_2 + C_3 e^{\delta\, l(x+a)}]$$

en ontwikkelt nu den vorm tusschen de haken in eene reeks, waardoor men verkrijgt

$$y = C_1 (x+a)^{-2} + (x+a) [(C_2+C_3) + \delta C_3 l(x+a) + \delta^2 C_3 R].$$

Hierin stelt men

$$C_2 + C_3 = C_4$$

en

$$\delta C_3 = C_5,$$

waarna men overgaat tot *Grens* $\delta = 0$; hetgeen voor de algemeene integraal oplevert

$$y = C_1 (x + a)^{-2} + (x + a) [C_4 + C_5\, l (x + a)].$$

Om op dit voorbeeld de methode van de variatie der standvastigen toe te passen, moet men

$$y = C_1 (x + a)^{-2} + C_2 (x + a)$$

als eene bijzondere integraal der vergelijking beschouwen en volgens de wijze te werk gaan, die in § 152 is vermeld. Men vindt alsdan achtereenvolgens

$$y = C_1 (x + a)^{-2} + C_2 (x + a),$$

$$y' = -2 C_1 (x + a)^{-3} + C_2$$

en $C_1' (x + a)^{-2} + C_2' (x + a) = 0,$ . . . . (102a)

$$y'' = 6 C_1 (x + a)^{-4} - 2 C_1' (x + a)^{-3} + C_2'$$

en $y''' = -24 C_1 (x + a)^{-5} + 12 C_1' (x + a)^{-4} -$

$$- 2 C_1'' (x + a)^{-3} + C_2'';$$

en na substitutie in de gegeven vergelijking

$$-2 C_1'' + 6 (x + a)^{-1} C_1' + (x + a)^3 C_2'' + 3 (x+a)^2 C_2' = 0.$$

Elimineert men nu uit deze vergelijking en de betrekking (102a) C_1, dan verkrijgt men

$$(x + a) C_2'' + C_2' = 0,$$

zijnde eene differentiaal-vergelijking van de tweede orde; deze kan gemakkelijk worden opgelost door de methode van de scheiding der veranderlijken, daar men haar kan schrijven in den vorm

$$\frac{dC_2'}{C_2'} + \frac{dx}{x+a} = 0,$$

welke onmiddellijk geeft

$$C_2' = \frac{B_1}{x+a},$$

en dus

$$C_2 = B_2 + B_1\, l\, (x+a).$$

Het is nu niet noodig C_1 te bepalen, daar de onvolledigheid van de integraal alleen hare oorzaak vond in het meermalen voorkomen der bijzondere integraal

$$y = C_2\, (x+a).$$

Voor de algemeene integraal vindt men derhalve, evenals boven

$$y = C_1\, (x+a)^{-2} + (x+a)\, [B_2 + B_1\, l\, (x+a)].$$

Wil men deze omslachtige handelwijze niet volgen, dan kan men de gegeven vergelijking herleiden tot eene met standvastige coëfficienten, waartoe men

$$x + a = e^u$$

stelt. Na deze substitutie kan men dan als boven te werk gaan [54]).

175. Uit de voorgaande ontwikkelingen blijkt, dat bij de lineaire differentiaal-vergelijkingen met standvastige

---

[54]) Men kan ook even als in het voorgaande voorbeeld alleen $y = C_2\, (x+a)$ in de gegeven vergelijking substitueeren, waardoor men komt tot de vergelijking

$$(x+a)^2\, C_2''' + 6\, (x+a)\, C_2'' + 4\, C_2' = 0.$$

Door in deze $C_2' = (x+a)^m$ te stellen verkrijgt men

$$m^2 + 5m + 4 = 0$$

en dus $m = -4$ en $m = -1$; bijgevolg $C_2' = (x+a)^{-4}$ en $C_2' = (x+a)^{-1}$ en na integratie

$$C_2 = B_1 + B_2\, (x+a)^{-3} \text{ en } C_2 = B_3 + B_4\, l\, (x+a).$$

Na substitutie en samenvoeging volgt hieruit voor de algemeene integraal

$$y = B_5\, (x+a)^{-2} + (x+a)\, [B_6 + B_7\, l\, (x+a)].$$

coëfficienten of met coëfficienten van den vorm $A_k(a+bx)^k$, in het geval dat de équation caractéristique gelijke wortels heeft, de methode van d'Alembert, wat kortheid van bewerking aangaat, veel voor heeft boven die van de variatie der standvastigen; en dus van eene zuiver practische zijde beschouwd de voorkeur verdient boven deze laatste. Hoewel de genoemde vergelijkingen van alle differentiaal-vergelijkingen het meest in de toepassing voorkomen, heeft die voorkeur toch weinig te beteekenen; vooreerst, omdat deze vergelijkingen door de methode van den integreerenden factor volledig en streng wetenschappelijk zijn opgelost; en ten tweede, omdat ieder, die eenigszins vertrouwd is met de oplossing van differentiaal-vergelijkingen van de tweede en hoogere orde, in het onderhavige geval zonder toepassing van eenige methode de algemeene integraal weet aan te vullen.

176. Van veel meer practisch belang is de toepassing van de beide methoden in questie bij den overgang van eene algemeene vergelijking tot eene meer bijzondere, wier bijzondere integralen niet alle in die der algemeene vergelijking schijnen opgesloten te zijn, doordat zij in vorm van deze verschillen. Juist de omstandigheid, dat de methode van d'Alembert in dit geval zoo spoedig en eenvoudig tot de gezochte algemeene integraal leert besluiten, zelfs wanneer de bijzondere integralen een ingewikkelden vorm hebben, verleent haar eene hooge practische waarde.

Een enkel voorbeeld zal deze bewering bevestigen: in § 78 vonden wij voor de vergelijking

$$y'' + \frac{A_1}{x} y' + A_0 y = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (47)$$

de algemeene integraal

$$y = C_1 \int_0^\pi Cos\,(x\sqrt{A_0}\,Cos\,u)\,Sin^{A_1-1}u\,du +$$

$$+ C_2 x^{1-A_1} \int_0^\pi Cos\,(x\sqrt{A_0}\,Cos\,u)\,Sin^{1-A_1}u\,du, \; . \; (47g)$$

wanneer namelijk voldaan wordt aan de voorwaarde

$$2 > A_1 > 0;$$

— en laat nu gevraagd worden naar de algemeene integraal der vergelijking

$$y'' + \frac{1}{x} y' + A_0 y = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (47^h)$$

De eenvoudige substitutie $A_1 = 1$ zou klaarblijkelijk slechts eene bijzondere integraal dezer vergelijking opleveren, zoodat men noodzakelijk zijne toevlucht moet nemen tot eene der aanvullings-methoden. Vervangt men dan in den tweeden term der gevonden uitdrukking (47^g) A_1 door $1 + \delta$ dan gaat die term over in

$$C_2 \int_0^\pi Cos\,(x \sqrt{A_0}\, Cos\, u)\,(x\, Sin\, u)^{-\delta}\, du,$$

waarvoor men na de gewone ontwikkeling in eene reeks en overgaande tot *grens* $\delta = 0$ vindt (Duhamel, p. 125)

$$C_2 \int_0^\pi Cos\,(x \sqrt{A_0}\, Cos\, u)\, du +$$

$$+ C_3 \int_0^\pi Cos\,(x \sqrt{A_0}\, Cos\, u)\,(lx + l\, Sin\, u)\, du;$$

daar voorts de eerste term van (47^g) overgaat in

$$C_1 \int_0^\pi Cos\,(x \sqrt{A_0}\, Cos\, u)\, du + C_4 \int_0^\pi Cos\,(x \sqrt{A_0}\, Cos\, u)\, l\, Sin\, u\, du,$$

verkrijgt men voor de gezochte algemeene integraal

$$y = C_5 \int_0^\pi Cos\,(x \sqrt{A_0}\, Cos\, u)\, du +$$

$$+ C_6 \int_0^\pi Cos\,(x \sqrt{A_0}\, Cos\, u)\, l\,(x\, Sin^2\, u)\, du.$$

De methode van d'Alembert leert dus hier de algemeene integraal vinden door een eenvoudigen grensovergang, terwijl de methode van de variatie der standvastigen door de substitutie van

$$y = C_1 y_1,$$

in de onderstelling dat ook C_1 van x afhangt, alleen kan voeren tot den vorm

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{dx}{x y_1^2},$$

waarin voor y_1 nog de waarde

$$y_1 = \int_0^\pi Cos\,(x \sqrt{A_0}\, Cos\, u)\, du$$

moet worden gesubstitueerd.

Zoowel in den vorm van de uitkomst, als in kortheid en eenvoud van bewerking staat bij dergelijke gevallen de methode van de variatie der standvastigen verre achter bij die van d'Alembert.

Al heeft men dan ook niet de zekerheid, dat deze laatste methode eene ware uitkomst oplevert, en moet men, om die zekerheid te erlangen, die uitkomst nog aan de differentiaal-vergelijking toetsen, de practische man blijft steeds deze methode verkiezen, wanneer er moeilijkheden uit den weg te ruimen zijn bij het bepalen van de algemeene integraal eener differentiaal-vergelijking uit die eener meer algemeene vergelijking.

177. Alleen in een enkel geval, dat in zeker opzicht in het voorgaande ligt opgesloten, en waarin hij beide methoden kan aanwenden, zal hij uit den aard der zaak de methode van de variatie der standvastigen verkiezen, namelijk in de gevallen van uitzondering bij de vergelijkingen, die behooren tot die, welke in § 156 zijn vermeld. Zoo zal hij de daar als voorbeeld gekozen vergelijking

$$y^{IV} + 2y''' - 2y' - y = ae^{-x} \quad \ldots\ldots \quad (96)$$

niet oplossen door eerst de vergelijking

$$y^{IV} + 2y''' - 2y' - y = ae^{-Ax} \quad \ldots\ldots \quad (96^a)$$

te integreeren, daarna $A = 1 + \delta$ te stellen en dan op de bij de methode gebruikelijke wijze tot *grens* $\delta = 0$ over te gaan (Moigno, p. 628). Om de algemeene integraal der vergelijking (96^a) te bepalen, moet hij toch reeds van eene andere aanvullings-methode of van de hierbij niet gebrui-

kelijke methode van den integreerenden factor gebruik maken; en welke methode hij daartoe ook moge verkiezen, steeds laat zij zich gemakkelijker toepassen op de oorspronkelijke vergelijking dan op de nieuw gestelde, zoodat men door bovengenoemde handelwijze het werk dubbel verzwaart.

Is het geval omgekeerd, en dus de taak om uit de bekende integraal der vergelijking (96ª) die der vergelijking (96) af te leiden, dan zal klaarblijkelijk de methode van d'Alembert te verkiezen zijn boven elke andere; maar dit geval komt in de werkelijke toepassing zelden voor.

178. Wat eindelijk het laatste punt van vergelijking betreft, in algemeenheid van toepassing staat de methode van de variatie der standvastigen zeer veel hooger dan die van d'Alembert, ten gevolge van de meerdere algemeenheid van het beginsel, waarop zij steunt. Behalve dat zij overal kan worden aangewend, waar de laatstgenoemde methode zou kunnen worden toegepast, leert zij ook de algemeene integraal eener niet-herleide vergelijking uit die der overeenkomstige herleide afleiden, zelfs dan, wanneer van deze laatste minder dan n bijzondere integralen bekend zijn; leert zij in vele gevallen ook nietlineaire vergelijkingen met vrucht behandelen, enz. enz.

179. Maar juist de meerdere algemeenheid in toepassing van de methode van de variatie der standvastigen is dikwijls oorzaak, dat men aan de overige aanvullings-methoden geen recht laat wedervaren. Ook deze overschrijden dikwijls het doel, dat men bij hunne toepassing in het algemeen beoogt. Een paar voorbeelden zullen dit voor de methode van d'Alembert bevestigen.

In § 101 hebben wij gezien, dat

$$y = C_1 \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} e^{-ux} du +$$

$$+ C_2 x^{1-p-q} \int_0^1 u^{-q} (1-u)^{-p} e^{-ux} du,$$

de algemeene integraal is der niet-herleide Spitzersche vergelijking

$$xy'' + (p + q + x)\,y' + py = 0, \;.\;.\;.\;.\;.\; (37^d)$$

wanneer p en q positieve gebruikelijke breuken voorstellen. Gaat deze vergelijking over in

$$xy'' + (1 + x)\,y' + py = 0, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (103)$$

dat is, wordt

$$p + q = 1,$$

dan lost zich bovenstaande algemeene integraal schijnbaar op in de bijzondere

$$y_1 = C_1 \int_0^1 u^{p-1} (1 - u)^{-p} e^{-ux} du. \;.\;.\;. \;(103^a)$$

Om nu de tweede bijzondere integraal te bepalen stelt men in den tweeden term van de genoemde algemeene integraal

$$p + q = 1 - \delta,$$

waardoor deze overgaat in

$$y_2 = C_2 \int_0^1 u^{p-1} (1 - u)^{q-1} e^{-ux} [xu\,(1 - u)]^{\delta} du,$$

of na de gewone ontwikkeling van den factor tusschen de haken

$$y_2 = C_2 \int_0^1 u^{p-1} (1 - u)^{q-1} e^{-ux} [1 + \delta\, l(xu\,(1 - u)) + \delta^2 R] du,$$

of wat hetzelfde is

$$y_2 = C_2 y_1 + C_2 \delta \int_0^1 u^{p-1} (1 - u)^{q-1} e^{-ux} [l\,(xu\,(1 - u)) + \delta R]\, du;$$

en dus na overgang tot *grens* $\delta = 0$ (§ 171)

$$y_2 = C_2 y_1 + C_3 \int_0^1 u^{p-1} (1 - u)^{q-1} e^{-ux}\, l[xu\,(1 - u)]\, du. \;(103^b)$$

Verbindt men nu deze uitdrukking met (103^a), dan vindt men voor de gezochte algemeene integraal der vergelijking (103)

$$y = C_4 \int_0^1 u^{p-1} (1 - u)^{-p} e^{-ux} du +$$

$$+ C_3 \int_0^1 u^{p-1} (1 - u)^{-p} e^{-ux}\, l\,[xu\,(1 - u)]\, du.$$

Uit dit voorbeeld ziet men, dat de methode van d'Alembert niet alleen kan worden toegepast, wanneer twee of meer bijzondere integralen zich in eene enkele schijnen op te lossen; en dit een gevolg is daarvan, dat men aan een of meer standvastige coëfficienten der differentiaal-vergelijking bijzondere waarden toekent; maar ook dan, wanneer zulks een gevolg is van de omstandigheid, dat eene bepaalde functie dier standvastige coëfficienten eene bijzondere waarde verkrijgt, voor welke een of meer bijzondere integralen onder andere vormen voorkomen [55]).

Wilde men in die gevallen de methode van de variatie der standvastigen toepassen, dan zoude men den meer omslachtigen weg van § 152 moeten volgen. De methode van d'Alembert heeft daarbij het groote voordeel zich uitsluitend bezig te houden met de aan te vullen integraal zonder dat de aard der differentiaal-vergelijking invloed uitoefent op hare toepassing.

180. Ook in andere gevallen kan de methode van d'Alembert, al is het ook in eenigszins gewijzigden vorm, somtijds

---

[55]) Meestal slaat men hierbij een anderen weg in (Moigno, p. 628; Sturm, p. 127). Men stelt namelijk $p+q=1-\delta$ en bepaalt de grenswaarde van

$$\frac{y_1-y_2}{p+q-1}$$

voor *grens* $\delta=0$. Deze handelwijze leidt steeds tot de tweede bijzondere integraal ingeval y_1 en y_2 ongelijk zijn en dus de beide bijzondere integralen verschillende functiën zijn van x. Waren y_1 en y_2 gelijk of verschilden deze alleen door standvastigen factoren, dan zou de genoemde grenswaarde voor elke waarde van $p+q-1$ en dus ook voor $\delta=0$ den vorm $\frac{a}{0}$ of $\frac{0}{0}$ aannemen en bijgevolg niet tot de gezochte bijzondere integraal voeren. Daar nu de grenswaarde van

$$\frac{y_1-y_2}{p+q-1}$$

tot de uitdrukking (103^b) voert, en deze werkelijk van (103^a) verschilt, zal deze methode steeds kunnen worden toegepast en kan zij dus de bovengenoemde methode van d'Alembert vervangen. Schlömilch, S. 537; Petzval, Bd. I. S. 131; Spitzer, 1e Forts. S. 34, S. 38; 2e Forts. S. 115; enz.

zeer goede diensten bewijzen, zooals uit het volgende blijkt.

Indien bij de toepassing van de methode der bepaalde integralen U_0 en U_1 een gemeenschappelijken factor $u - p_1$ hebben (zie § 96), die echter in U_1 slechts éénmaal voorkomt, dan gaat daardoor eene der bijzondere integralen verloren. Om nu deze laatste terug te vinden, kan men op de volgende wijze te werk gaan: waren deze factoren $u - p_1$ en $u - p_2$ en dus ongelijk, dan zou

$$y = \int_{p_1}^{p_2} \frac{du}{U_1} e^{ux} + \int \frac{U_0}{U_1} du$$

die bijzondere integraal zijn; in plaats van nu hierin $p_2 = p_1$ te nemen, stelle men $p_2 = p_1 + q_2\delta$ en $p_1 = p_1 - q_1\delta$, waarbij δ nul tot grens heeft. Men verkrijgt daardoor de „intégrale singulière"

$$y = \int_{p_1 - q_1\delta}^{p_1 + q_2\delta} \frac{du}{U_1} e^{ux} + \int \frac{U_0}{U_1} du,$$

die klaarblijkelijk tot den vorm

$$y = \int_{p_1 - q_1\delta}^{p_1 + q_2\delta} e^{ux} \frac{\Phi(u)}{u - p_1} du,$$

kan worden teruggebracht. Substitueert men nu in deze integraal

$$u = p_1 + \delta v,$$

dan gaat zij over in

$$y = \int_{-q_1}^{q_2} e^{x(p_1 + \delta v)} \frac{\Phi(p_1 + \delta v)}{v} dv,$$

en na den overgang tot *Grens* $\delta = 0$ in

$$y = e^{p_1 x} \Phi(p_1) \int_{-q_1}^{q_2} \frac{dv}{v},$$

wat hetzelfde is als

$$y = C e^{p_1 x}.$$

Hoewel deze uitkomst reeds op geheel andere meer eenvoudige wijzen verkregen is (zie § 88), is toch deze afleiding van gewicht, daar zij kan worden uitgebreid voor het geval, dat U_0 en U_1 meer gemeenschappelijke factoren hebben (Petzval, Bd. I. S. 66), en zij er toe bijdraagt om ons in staat te stellen het verband aan te wijzen, dat er tusschen de verschillende vormen bestaat, waarin de bijzondere integralen eener lineaire vergelijking kunnen voorkomen. Bovendien dient die afleiding om de methode van de bepaalde integralen ook in die gevallen bruikbaar te maken, waarin het gemeenschappelijk voorkomen van factoren in teller en noemer der breuk $\frac{U_0}{U_1}$ haren werkkring zoude beperken.

De voorgaande afleiding steunt op hetzelfde beginsel als de methode van d'Alembert, en kan zelfs als eene toepassing van deze worden beschouwd. Op dezelfde wijze kan men steeds te werk gaan, wanneer het gelijk zijn van twee of meer standvastige getallen de oorzaak is, dat eene differentiaal-vergelijking zich aan de volledige toepassing der gewone integratie-methode onttrekt.

Men ziet dus, dat de toepassing van het beginsel van de methode van d'Alembert geenszins beperkt is tot de beide functiën, die wij in § 171 vermeldden. Toch blijft die toepassing zeer beperkt in vergelijking van die van het beginsel, waarop de methode van de variatie der standvastigen steunt.

181. Door de voorgaande beschouwingen komen wij tot het volgende besluit: in eenvoudigheid en zuiverheid van beginsel, in theoretische waarde, in algemeenheid van opvatting en in uitgebreidheid van toepassing staat de methode van de variatie der standvastigen ver boven die van d'Alembert — daar echter, waar beide methoden kunnen worden toegepast, verdient de laatste de voorkeur door de meerdere een-

voudigheid en kortheid van bewerking en dikwijls ook door de meerdere eenvoudigheid van de uitkomst.

h. DE TWEEDE METHODE VAN LAGRANGE.

182. Het tweede hoofddoel, dat men bij de toepassing van eene der aanvullings-methoden kan trachten te bereiken, is de algemeene integraal eener niet-herleide vergelijking uit die der overeenkomstige herleide of homogene af te leiden. Tot de bereiking van dit doel leenen zich voornamelijk vier methoden, waarvan de beide eerste door Lagrange, de beide laatste door Cauchy werden medegedeeld.

De eerste methode van Lagrange, die van de variatie der standvastigen, hebben wij reeds uitvoerig beschouwd; met de behandeling der overige drie methoden zullen wij ons thans bezighouden.

183. Behalve de methode van de variatie der standvastigen werd door Lagrange (Misc. Taur. p. 182) nog eene tweede methode medegedeeld, waardoor de integratie der niet-herleide lineaire differentiaal-vergelijking der n^e orde

$$y^{(n)}+X_{n-1}y^{(n-1)}+X_{n-2}y^{(n-2)}+\ldots+X_1y'+X_0y=X \quad (6^a)$$

kan worden teruggebracht tot die eener niet-herleide lineaire vergelijking der $(n-1)^e$ orde, wanneer het gelukt is éène bijzondere integraal van eene overeenkomstige lineaire vergelijking van de n^e orde zonder tweede lid te bepalen. Die methode bestaat hierin, dat men, u als eene voorloopig nog onbekende functie van x beschouwende, beide leden der vergelijking met udx vermenigvuldigt en vervolgens al de termen van het eerste lid, behalve den laatsten, gedeeltelijk integreert ten opzichte van x, waarbij men alsdan $y^{(k)}dx$ als een volkomen differentiaal beschouwt. Men verkrijgt op die wijze

$$\int X_0\, y\, u\, dx = \int y\, X_0\, u\, dx,$$

$$\int X_1\, y'\, u\, dx = y\, X_1\, u - \int y\, \frac{d\,(X_1\, u)}{dx}\, dx,$$

$$\int X_2\, y''\, u\, dx = y'\, X_2\, u - y\, \frac{d\,(X_2\, u)}{dx} + \int y\, \frac{d^2\,(X_2\, u)}{dx^2}\, dx,$$

.... enz. tot

$$\int y^{(n)}\, u\, dx = y^{(n-1)}\, u - y^{(n-2)}\, \frac{du}{dx} + \dots + (-1)^n \int y\, \frac{d^n\, u}{dx^n}\, dx.$$

Stellen wij dus de som der termen onder het integraalteeken, of wat op hetzelfde neerkomt

$$\frac{d^n u}{dx^n} - \frac{d^{n-1}\,(X_{n-1}\, u)}{dx^{n-1}} + \frac{d^{n-2}\,(X_{n-2}\, u)}{dx^{n-2}} - \dots +$$
$$+ (-1)^n\, X_0\, u = 0, \quad \dots\dots\dots \quad (6^e)$$

dan gaat de oorspronkelijke vergelijking (6^a) over in

$$y\left[X_1\, u - \frac{d\,(X_2\, u)}{dx} + \frac{d^2\,(X_3\, u)}{dx^2} - \dots\right] + y'\left[X_2\, u - \frac{d\,(X_3\, u)}{dx} + \right.$$
$$\left. + \frac{d^2\,(X_4\, u)}{dx^2} - \dots\dots\right] + y''\left[X_3\, u - \frac{d\,(X_4\, u)}{dx} + \frac{d^2\,(X_5\, u)}{dx^2} - \dots\right] +$$
$$+ \dots\dots\dots + y^{(n-1)}\, u = \int X\, u\, dx. \quad \dots\dots \quad (6^f)$$

Kan men nu u zoodanig bepalen, dat aan de homogene vergelijking (6^e) wordt voldaan, m. a. w. kent men eene bijzondere integraal dier vergelijking, dan is de oplossing van de gegeven vergelijking (6^a) der n^e orde teruggebracht tot die van de vergelijking (6^f) der $(n-1)^e$ orde.

184. Bij eene aandachtige beschouwing blijkt terstond, dat de hier uiteengezette methode niets anders is dan de methode van den integreerenden factor: u is die factor zelf; de vergelijking (6^e) is de gewone integreerende vergelijking van Mayr, voor het bijzondere geval, dat men met lineaire vergelijkingen heeft te doen; terwijl de vergelijking (6^f) ook niets anders is dan die harer eerste integralen, welke met dien integreerenden factor u over-

eenkomt. Mocht de wijze van afleiding dier vergelijkingen dus ook al eenigszins verschillen van de gewone, de integratie zelve is zoo geheel en al dezelfde als die, welke de toepassing van de methode van den integreerenden factor medebrengt, dat wij voor het overige naar deze laatste methode verwijzen [56]) en ons hier verder alleen onledig houden met de bovengenoemde door Cauchy medegedeelde methoden.

i. DE METHODEN VAN CAUCHY.

185. *α*. **Eerste methode van Cauchy.** Bij de eerste methode van Cauchy brengt men door invoering eener nieuwe afhankelijk veranderlijke de bepaling van eene bijzondere integraal der niet-herleide vergelijking terug tot die van de algemeene integraal der overeenkomstige herleide. Die methode komt hierop neer. Zij de algemeene niet-herleide lineaire differentiaal-vergelijking

$$y^{(n)}+X_{n-1}y^{(n-1)}+X_{n-2}y^{(n-2)}+\ldots+X_1y'+X_0y=F(x), \quad (6^a)$$

en stelt men hierin

$$y=\int_0^x u\,d\alpha,$$

waarin u eene nog onbekende functie is van x en α, welke moet voldoen aan de voorwaarden, dat voor $x=\alpha$

en
$$\left.\begin{array}{l} u=0=u'=u''=\ldots\ldots=u^{(n-2)}, \ \ldots\ldots \\ u^{(n-1)}=F(\alpha), \ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}(6^g)$$

onverschillig wat de waarde van α zij; dan zal bij die onderstelling de substitutie van de genoemde waarde van

[56]) Riemann, die deze methode van Lagrange, om de integratie eener lineaire differentiaal-vergelijking der n^e orde terug te brengen tot die van eene der $(n-1)^e$ orde, vermeldt, S. 100, spreekt niet van den integreerenden factor en dus ook niet van deze overeenstemming.

y in de gegeven vergelijking (6a) tot uitkomst opleveren (Moigno, p. 602; Duhamel, p. 63; Sturm, p. 113) de vergelijking

$$u^{(n)} + X_{n-1} u^{(n-1)} + X_{n-2} u^{(n-2)} + \ldots + X_1 u' + X_0 u = 0. \quad (6^b)$$

Kent men nu de algemeene integraal

$$u = Y$$

dezer vergelijking, dan kan men de n willekeurige standvastigen, die zij bevat, steeds zoodanig bepalen, dat aan de bovengestelde voorwaarden wordt voldaan. Noemt men de daardoor verkregen bijzondere integraal U, dan is

$$y = \int_0^x U d\alpha$$

eene bijzondere en

$$y = Y + \int_0^x U d\alpha$$

de algemeene integraal der gegeven niet-herleide vergelijking.

186. In de toepassing komt derhalve deze methode hierop neer, dat men de willekeurige standvastigen der algemeene integraal der herleide vergelijking

$$y = \sum_1^n C_k y_k$$

aan de bovengenoemde n voorwaarden onderwerpt, ze uit die voorwaardens-vergelijkingen oplost en ze daarna substitueert in de vergelijking

$$y = \int_0^x \sum_1^n C_k y_{\alpha^k} d\alpha,$$

waardoor deze overgaat in eene bijzondere integraal der gegeven vergelijking. Nemen wij bijv. de algemeene lineaire differentiaal-vergelijking met standvastige coëfficienten, en schrijven wij de algemeene integraal der herleide vergelijking in den vorm

$$y = \sum_1^n C_k e^{m_k(x-\alpha)},$$

dan zullen de bovengestelde voorwaarden $n-1$ vergelijkingen geven van den vorm

$$\sum_1^n C_k m_k^l = 0,$$

van $l=0$ tot $l=n-2$, alsmede de vergelijking

$$\sum_1^n C_k m_k^{n-1} = F(\alpha);$$

en uit deze n vergelijkingen vindt men nu, wanneer $\Phi(m)=0$ de équation caractéristique voorstelt,

$$C_k = \frac{F(\alpha)}{\Phi'(m_k)};$$

zoodat wij voor de gezochte algemeene integraal verkrijgen

$$y = \sum_1^n C_k e^{m_k(x-\alpha)} + \int_0^x \sum_1^n \frac{F(\alpha)}{\Phi'(m_k)} e^{m_k(x-\alpha)} d\alpha,$$

of wat hetzelfde is

$$y = \sum_1^n \frac{e^{m_k x}}{\Phi'(m_k)} [C_{k1} + \int_0^x e^{-m_k x} F(x)\, dx];$$

zijnde volkomen dezelfde uitkomst, waartoe de methode van de variatie der standvastigen voert. Voor deze algemeene afleiding van de algemeene integraal der niet-herleide lineaire differentiaal-vergelijkingen met standvastige coëfficienten uit de algemeene integraal der herleide, komt deze laatste methode in vele opzichten met de beschouwde methode van Cauchy in aard en eenvoud van bewerking overeen. Bij bijzondere vergelijkingen verkrijgt echter deze laatste methode, bij eene geschikte keuze van den vorm, waarin de algemeene integraal der herleide vergelijking wordt voorop gesteld, in vele gevallen een groot overwicht boven de eerste, doordat zij spoediger tot het doel voert (zie § 193 en vv.). Zij is echter klaarblijkelijk geheel ongeschikt voor het aanvullen van de integraal der herleide vergelijking.

187. β. **Cauchy-Fouriersche methode.** Behalve van de

voorgaande methode maakt Cauchy ook nog gebruik van de formule van Fourier

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\beta_1}^{\beta_2} e^{(x-\beta)\alpha i}\,\psi\,d\alpha\,d\beta, \quad \ldots . \quad (104)$$

waarin α en β niet van x afhangen, om uit de algemeene integraal der herleide vergelijking die der niet-herleide af te leiden. Daartoe substitueert hij deze waarde van y in die niet-herleide vergelijking, en tracht alsdan ψ zoodanig te bepalen, dat de uitkomst der substitutie eene identiteit oplevert; waardoor nu eene bijzondere integraal dier vergelijking is gevonden, welke met de algemeene integraal der herleide vergelijking de gezochte algemeene integraal geeft.

Heeft bijv. de lineaire differentiaal-vergelijking standvastige coëfficienten, en stelt men hare équation caractéristique voor door

$$\Phi(m) = 0,$$

dan zal de substitutie van de bovenstaande waarde van y voeren tot de vergelijking

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\Phi(\alpha i)\, e^{(x-\beta)\alpha i}\,\psi\,d\alpha\,d\beta = F(x), \quad (105)$$

waaraan identiek moet worden voldaan. Zulks zal het geval zijn, wanneer men heeft (Petzval, Bd. I. S. 84)

$$\psi = \frac{F(\beta)}{\Phi(\alpha i)},$$

zoodat men voor de bijzondere integraal der niet-herleide vergelijking vindt

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\beta_1}^{\beta_2} e^{(x-\beta)\alpha i}\,\frac{F(\beta)}{\Phi(\alpha i)}\,d\alpha\,d\beta.$$

Om het tweede lid dezer vergelijking te kunnen herlei-

den, ontbinden wij $\frac{1}{\Phi(\alpha i)}$ in gedeeltelijke breuken; onderstel, dat wij daarvoor vinden

$$\frac{1}{\Phi(\alpha i)}=\frac{\Phi'(m_1)^{-1}}{\alpha i-m_1}+\frac{\Phi'(m_2)^{-1}}{\alpha i-m_2}+\ldots\ldots+\frac{\Phi'(m_n)^{-1}}{\alpha i-m_n}, \quad . \ (106)$$

dan gaat de gevonden bijzondere integraal daardoor over in

$$y=\sum_1^n\frac{\Phi'(m_k)^{-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\beta_1}^{\beta_2}e^{(x-\beta)\alpha i}\frac{F(\beta)}{\alpha i-m_k}\,d\alpha\,d\beta.$$

Differentieert men nu deze uitdrukking ten opzichte van x, dan verkrijgt men

$$y'=\sum_1^n\frac{\Phi'(m_k)^{-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\alpha i\,e^{(x-\beta)\alpha i}\frac{F(\beta)}{\alpha i-m_k}\,d\alpha\,d\beta,$$

en dus ook

$$y'-\sum_1^n m_k\,y=\sum_1^n\frac{\Phi'(m_k)^{-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\beta_1}^{\beta_2}e^{(x-\beta)\alpha i}F(\beta)\,d\alpha\,d\beta,$$

of in verband met (105)

$$y'-\sum_1^n m_k\,y=\sum_1^n\Phi'(m_k)^{-1}F(x);$$

waaruit volgt

$$y=\sum_1^n\Phi'(m_k)^{-1}e^{m_kx}.\int e^{-m_kx}F(x)\,dx, \quad \ldots \ (107)$$

en bijgevolg voor de gezochte algemeene integraal

$$y=\sum_1^n\frac{e^{m_kx}}{\Phi'(m_k)}\left(C_k+\int e^{-m_kx}F(x)\,dx\right);$$

zijnde dezelfde uitkomst, als wij bij de voorgaande methoden vonden.

Heeft hierbij de équation caractéristique gelijke wortels, dan is de aangevoerde methode evenzeer toepasselijk; zijn bijv. p wortels gelijk m_1, dan zal voor het deel, dat den factor $\alpha i-m_1$ betreft, de bovenstaande vergelijking (106) overgaan in

$$\frac{N_p}{(\alpha i - m_1)^p} + \frac{N_{p-1}}{(\alpha i - m_1)^{p-1}} + \ldots\ldots + \frac{N_1}{\alpha i - m_1},$$

waarin

$$N_{p-k} = \frac{1}{1^{k-1/1}}\, d_m^k \frac{(m - m_1)^p}{\Phi(m)}\Big]_{m = m_1};$$

en dus het hiermede overeenkomstige deel van de bijzondere integraal in

$$y_k = \sum_1^p \frac{N_k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\beta_1}^{\beta_2} e^{(x-\beta)\alpha i} \frac{F(\beta)}{(\alpha i - m_1)^k}\, d\alpha\, d\beta.$$

Onderwerpt men nu deze vergelijking aan de bewerkingen, die door het symbool $(d_x - m_1)^k$ worden aangegeven, dan verkrijgt men

$$(d_x - m_1)^k y_k = \sum_1^p N_k F(x),$$

of na vermenigvuldiging met $e^{-m_1 x}$

$$d_x^k (e^{-m_1 x} y_k) = \sum_1^p N_k e^{-m_1 x} F(x),$$

en na k-malige integratie [57])

$$y_k = \sum_1^p N_k e^{m_1 x} \int^{(k)} e^{-m_1 x} F(x)\, dx^k; \quad . . . (108)$$

derhalve voor de gezochte algemeene integraal

---

[57]) Petzval brengt bij deze formule (108) de standvastigen der integratie in rekening en schrijft haar (Bd. I. S. 124) in den vorm:

$$y_k = \sum_1^p \left[N_k e^{m_1 x} \int^{(k)} e^{-m_1 x} F(x)\, dx^k + e^{m_1 x} \Gamma_k\right],$$

waardoor het den schijn verkrijgt, alsof voor de volledige integratie der niet-herleide vergelijking volgens deze methode in bovenstaand geval de algemeene integraal der herleide vergelijking niet door eenige andere aanvullings-methode behoeft gecompleteerd te worden. Deze handelwijze is echter niet te verdedigen.

$$y = \sum_{1}^{p} N_k e^{m_1 x} [C_k x^{k-1} + \int^{(k)} e^{-m_1 x} F(x) dx^k] +$$

$$+ \sum_{p+1}^{n} \frac{e^{m_k x}}{\Phi'(m_k)} [C_k + \int e^{-m_k x} F(x) dx] \ldots \quad (109)$$

188. Komt in $\Phi(\alpha i)$ de onafhankelijk veranderlijke x voor, dan hangt ook ψ van x af; en wordt dus de substitutie van de vooropgestelde waarde van y veel ingewikkelder, terwijl de bepaling van ψ uit de komende vergelijking met onoverkomelijke bezwaren zou gepaard gaan. Dit is dan ook de reden, waarom de bovenvermelde methode niet zonder wijziging op lineaire vergelijkingen met veranderlijke coëfficienten kan worden toegepast. Zijn die coëfficienten van den vorm

$$A_k (a + bx)^k,$$

dan herleidt men de differentiaal-vergelijking zelve tot eene met standvastige coëfficienten; zijn zij echter van den vorm (Petzval, Bd. I. S. 128)

$$a_k + b_k x,$$

dan wordt de bijzondere integraal als eene drievoudige integraal

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_{u_1}^{u_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\beta_1}^{\beta_2} e^{ux} \psi \, du \, d\alpha \, d\beta \ldots \quad (110)$$

vooropgesteld, waarin ψ eene nog onbekende functie is van u, α en β, en u_1 en u_2 nog nader te bepalen grenzen voorstellen, die door de substitutie in de gegeven vergelijking moeten bepaald worden. Die substitutie voert klaarblijkelijk tot de vergelijking

$$\frac{1}{2\pi} \int_{u_1}^{u_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\beta_1}^{\beta_2} (U_0 + U_1 x) e^{ux} \psi \, du \, d\alpha \, d\beta = F(x), \quad (111)$$

waarin U_0 en U_1 de waarden voorstellen, in § 94 aangewezen. Gaat men nu evenzoo te werk als daar, en her-

leidt men het laatste deel der integraal zoodanig, dat x als factor verdwijnt, dan verkrijgt men

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\beta_1}^{\beta_2} e^{ux}\,U_1\,\psi\,d\alpha\,d\beta\Big[_{u_1}^{u_2}+\frac{1}{2\pi}\int_{u_1}^{u_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\beta_1}^{\beta_2} e^{ux}\{U_0\,\psi-$$
$$-d_u\,(U_1\,\psi)\}\,du\,d\alpha\,d\beta=F(x). \;.\;.\;.\;.\;.\; (112)$$

Nu kiest men ψ zoodanig, dat

$$U_0\,\psi-d_u\,(U_1\,\psi)=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (113)$$

is, waaruit volgt

$$\psi=\frac{Q}{U_1}\,e^{\int\frac{U_0}{U_1}du}, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (114)$$

waarin Q eene functie voorstelt, die standvastig is met betrekking tot u, maar die wel van α en β kan afhangen.

Hierdoor gaat de vergelijking over in

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\beta_1}^{\beta_2} Q\,e^{ux+\int\frac{U_0}{U_1}du}\,d\alpha\,d\beta\Big]_{u_1}^{u_2}=F(x),$$

waarin nu u_1, u_2 en Q moeten bepaald worden. Door deze vergelijking met (105) te vergelijken, blijkt onmiddellijk, dat aan dezelve identiek zal worden voldaan, wanneer men heeft

$$u_2=\alpha i,$$

$$e^{ux+\int\frac{U_0}{U_1}du}\Big]_{u_1}=0,$$

en

$$Q\,e^{ux+\int\frac{U_0}{U_1}du}\Big]_{\alpha i}=e^{(x-\beta)\alpha i}\,F(\beta),$$

of

$$Q=e^{-\beta\alpha i-\int\frac{U_0}{U_1}du}\Big]_{\alpha i}\,F(\beta).$$

Door de substitutie dezer waarden vindt men voor de gezochte bijzondere integraal

$$y=\frac{1}{2\pi}\int_{u_1}^{\alpha i}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\beta_1}^{\beta_2} e^{ux-\beta\alpha i+\int\frac{U_0}{U_1}du\Big]_{\alpha i}^{u}}\,\frac{F(\beta)}{U_1}\,du\,d\alpha\,d\beta, \; (115)$$

welke met de integraal der herleide vergelijking de algemeene integraal oplevert.

189. Om nu deze beide methoden onderling en met die van de variatie der standvastigen te vergelijken, stellen wij ook hier vooreerst de beginselen, waarop zij steunen, tegen elkaar over.

Bij de methode van de variatie der standvastigen gaat men uit van het beginsel, dat men de willekeurige standvastigen, die in de algemeene integraal der herleide vergelijking voorkomen, op oneindig vele wijzen door functiën van x kan vervangen, zoodat de daardoor verkregen vergelijking voor y eene integraal zij der niet-herleide vergelijking; — stelt dus die standvastigen van x afhankelijk; onderwerpt ze aan $n-1$ voorwaarden; en tracht voorts door substitutie in de niet-herleide vergelijking de n^e voorwaarde op te sporen, om uit deze n voorwaardens-vergelijkingen die gewezen standvastigen te kunnen bepalen; de substitutie harer waarden in de integraal der niet-herleide vergelijking geeft alsdan de gezochte algemeene integraal.

Bij de eerst behandelde methode van Cauchy neemt men ook de onbepaaldheid van de willekeurige standvastigen uit de algemeene integraal der herleide vergelijking te baat, onderwerpt ze ook aan n voorwaarden, maar stelt ze niet van x afhankelijk; integendeel stelt men daarbij de bijzondere integraal vast in den vorm eener bepaalde integraal

$$y = \int_0^x \sum_1^n C_k \, y_{\alpha^k} \, d\alpha,$$

wier grenzen van x afhangen. De substitutie van de bijzondere waarden der standvastigen, uit de zooeven genoemde n voorwaardens-vergelijkingen verkregen, in deze aangenomen waarde van y levert alsdan eene bijzondere integraal, die met de algemeene integraal der herleide vergelijking de gezochte algemeene integraal geeft.

190. In vele opzichten komen de hier kortweg aangewezen beginselen met elkaar overeen: bij beide methoden spelen de willekeurige standvastigen, die in de algemeene integraal der herleide vergelijking voorkomen, de hoofdrol; bij beide worden zij aan n voorwaarden gebonden, die zoodanig worden gekozen, dat daardoor de substitutie der aangenomen integraal in de niet-herleide vergelijking zooveel mogelijk wordt vereenvoudigd; en voert de substitutie van de daaruit bepaalde waarden dier standvastigen in deze aangenomen integraal tot de volledige integratie der gegeven vergelijking. Terwijl echter bij de Cauchysche methode de bijzondere integraal dier vergelijking in den vorm eener bepaalde integraal wordt vastgesteld, wordt bij de methode van de variatie der standvastigen alleen ondersteld, dat de algemeene integraal derzelve van denzelfden vorm is als die der herleide; en levert dus deze methode onmiddellijk die algemeene integraal, waar de eerstgenoemde slechts tot de kennis van eene bijzondere integraal kan voeren.

191. Ook bij de tweede Cauchysche methode, die wij ter onderscheiding de Cauchy-Fouriersche methode hebben genoemd, stelt men den vorm der bijzondere integraal vast, en wel als eene meervoudige integraal, wier grenzen niet van x afhangen, en die eene functie ψ bevat, welke men zoodanig moet bepalen, dat de substitutie der vastgestelde integraal in de niet-herleide vergelijking eene identieke vergelijking oplevert.

Evenals bij de eerste Cauchysche methode stelt men dus ook hierbij de bijzondere integraal der niet-herleide vergelijking vast in den vorm eener bepaalde integraal; en in zoover komen deze methoden met elkaar overeen. In de toepassing verschillen zij echter geheel en al; terwijl toch bij de eerste Cauchysche methode de integratie der herleide vergelijking de toepassing der methode moet voorafgaan, wijl uit de daardoor verkregen integraal de gezochte bijzondere integraal wordt afgeleid: is bij de Cauchy-Fou-

riersche methode die algemeene integraal geen volstrekt vereischte, en kan de integratie dezer herleide vergelijking als het ware onder de hand worden verricht; zoodat men onmiddellijk tot de opsporing van de gezochte bijzondere integraal kan overgaan; daarbij hebben de standvastigen van de algemeene integraal der herleide vergelijking volstrekt geen invloed, terwijl bij de eerste Cauchysche methode de bepaling van de bijzondere waarden dier standvastigen juist de hoofd-verrichting der integratie uitmaakt. Terwijl dan ook deze laatste methode als eene zuivere aanvullings-methode moet worden beschouwd, komt de Cauchy-Fouriersche methode in vele opzichten, zoowel in de toepassing als in beginsel, met de hoofd-methoden overeen. Dit verschil in karakter van deze beide methoden is uitsluitend een gevolg van het verschil in den vorm, waarin de gezochte bijzondere integraal wordt vastgesteld.

192. Verder staan de beginselen, waarop de beide Cauchysche methoden berusten, in eenvoudigheid en algemeenheid ver achter bij dat, waarop de methode van de variatie der standvastigen steunt. Bij deze laatste gaat men eenvoudig uit van deze algemeene onderstelling, dat de integralen van alle lineaire vergelijkingen, welke alleen in het tweede lid verschillen, in vorm overeenkomen; — eene onderstelling, die door de ondervinding geleerd en door de wetenschap bevestigd is; terwijl bij de Cauchysche methoden de vorm der bijzondere integraal voor alle klassen van niet-herleide lineaire vergelijkingen in een enkelen vorm wordt voorop gesteld, die dan met de algemeene integraal der herleide tot de gezochte integraal moet voeren. Men hangt hierbij dus geheel en al van de integraal der herleide vergelijking af; zonder dat deze volledig bekend is, is het niet mogelijk de gezochte algemeene integraal te bepalen. De methode van de variatie der standvastigen is echter in zoover onafhankelijk van het al of niet volledig zijn van de gevonden integraal der herleide

vergelijking, dat zij in geval deze onvolledig is, in de meeste gevallen toch tot de gezochte algemeene integraal voert, en voor zoo ver dit niet plaats heeft, de bepaling dier algemeene integraal terugbrengt tot de integratie eener herleide vergelijking van lagere orde dan de gegevene.

Uit het voorgaande blijkt, dat bij de methode van de variatie der standvastigen de integratie eener niet-herleide vergelijking veel eenvoudiger en algemeener wordt opgevat, dan bij de andere methoden; en juist die meerdere eenvoudigheid en algemeenheid in opvatting verleent haar eene veel ruimere practische toepassing en eene veel grootere theoretische waarde, dan aan de beide overige wordt toegekend.

193 Om verder deze methoden van eene zuiver practische zijde te vergelijken, zullen wij vooreerst den arbeid nagaan, die hare respectieve toepassing vereischt. Hebben wij in de eerste plaats eene niet-herleide lineaire vergelijking met standvastige coëfficienten, en is de algemeene integraal harer herleide vergelijking bekend, dan moet bij de methode van de variatie der standvastigen deze laatste in de gegeven niet-herleide vergelijking worden gesubstitueerd; waarbij men de willekeurige standvastigen niet alleen als van x afhankelijk onderstelt, maar ze tevens bindt aan $n-1$ voorwaarden, die met de uitkomst der substitutie tot de bepaling dier standvastigen en daardoor tot de gezochte algemeene integraal voeren.

Bij de eerste Cauchysche methode wordt de algemeene integraal der herleide vergelijking in een geschikten vorm geschreven, en vervolgens door differentiatie de waarden van y', y'', y''', ... $y^{(n-1)}$ bepaald; in die algemeene integraal, alsmede in de verkregen waarden, wordt nu x door α vervangen, en eindelijk de hierdoor gevonden uitkomsten, op de laatste na, gelijk aan nul gesteld, welke laatste $y_\alpha^{(n-1)}$ ondersteld wordt gelijk te zijn aan het tweede lid der niet-herleide vergelijking, wanneer ook daarin x

door α is vervangen. Men verkrijgt op die wijze ook n vergelijkingen, die tot de bepaling van de willekeurige standvastigen dienen.

194. De arbeid, dien men voor deze bijzondere klasse van lineaire vergelijkingen, welke trouwens in de werkelijkheid het meest voorkomt, bij de toepassing van de vorige methoden moet verrichten, schijnt dus ongeveer op hetzelfde neer te komen: bij de methode van de variatie der standvastigen heeft men de algemeene integraal der herleide vergelijking n-maal, bij de Cauchysche methode slechts $n-1$-maal te differentieeren; — bij de eerste geschiedt die differentiatie in de onderstelling, dat de willekeurige standvastigen ook van x afhangen, bij de laatste worden zij van x onafhankelijk ondersteld; — bij de eerste heeft men daarna de verkregen uitkomsten, na invoering van $n-1$ voorwaarden, in de niet-herleide vergelijking te substitueeren, terwijl bij de laatste de verkregen uitkomsten, nadat x door α is vervangen, gelijk nul of gelijk $F(\alpha)$ worden gesteld; — eindelijk vereischen beide de oplossing der n verkregen voorwaardens-vergelijkingen en de substitutie der gevonden waarden in de bovengenoemde algemeene integraal.

Zoowel in het aantal differentiaties van de integraal der herleide vergelijking, als in de wijze, waarop zulks geschiedt, en de substituties, die er op volgen, heeft hierbij de Cauchysche methode voor op de methode van de variatie der standvastigen door den minderen arbeid, dien zij vereischt; zoodat zij bij deze lineaire vergelijkingen met standvastige coëfficienten in kortheid van bewerking boven de laatste staat.

Ingeval de équation caractéristique slechts ongelijke bestaanbare wortels heeft, komt dit niet zoo sterk uit als ingeval er onder hare wortels complexe of gelijke voorkomen. In deze beide laatste gevallen schrijft men de algemeene integraal steeds in een zoodanigen vorm, dat er bij

de substitutie van $x = \alpha$ termen verdwijnen. Heeft men bijv. de vergelijking

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = F(x), \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (116)$$

dan schrijft men de algemeene integraal der herleide vergelijking in den vorm

$$y = e^{x-\alpha}\,[C_1 + C_2(x - \alpha) + C_3(x - \alpha)^2],$$

waaruit men na differentiatie en substitutie van $x = \alpha$ onmiddellijk vindt

$$C_1 = 0,$$

$$C_1 + C_2 = 0$$

en

$$C_1 + 2\,C_2 + 2\,C_3 = F(\alpha);$$

en dus ook $C_1 = C_2 = 0$ en $C_3 = \frac{1}{2} F(\alpha)$; bijgevolg voor de gezochte bijzondere integraal

$$y = \tfrac{1}{2}\int_0^x (x - \alpha)^2 e^{x-\alpha} F(\alpha)\, d\alpha.$$

Evenzoo is de omstandigheid, dat *Sin* $q(x - \alpha)$ voor $x = \alpha$ verdwijnt, oorzaak, dat in het geval van complexe wortels in de gevonden voorwaardens-vergelijkingen afwisselend sommige C niet voorkomen; de gunstige invloed, dien deze omstandigheid op de kortheid der bewerking uitoefent, zal zich klaarblijkelijk des te meer laten gevoelen, hoe meer paren complexe wortels de équation caractéristique bezit.

Uit het voorgaande is duidelijk, dat de mindere omslachtigheid van de Cauchysche methode het meest zal uitkomen, wanneer de équation caractéristique gelijke complexe wortels heeft. Heeft men bijv. de vergelijking

$$y^{IV} + 2y'' + y = F(x), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (117)$$

en schrijft men de algemeene integraal van de herleide vergelijking in den vorm

$$y = Cos(x-\alpha)\,[C_1 + C_2(x-\alpha)] + Sin(x-\alpha)\,[C_3 + C_4(x-\alpha)],$$

dan geeft de differentiatie en substitutie van $x = \alpha$ terstond de voorwaardens-vergelijkingen

$$C_1 = 0,$$
$$C_2 + C_3 = 0,$$
$$2\,C_4 - C_1 = 0,$$
en
$$-3\,C_2 - C_3 = F(x);$$
waaruit bijna onmiddellijk de gezochte bijzondere integraal volgt.

195. Eéne omstandigheid hebben wij echter bij deze beschouwingen uit het oog verloren, die van veel belang is bij de keuze der methode, waarvan men zich wil bedienen om de integraal der niet-herleide vergelijking te bepalen, wanneer de équation caractéristique gelijke wortels heeft. Voor de toepassing van de methode van Cauchy is het alsdan noodzakelijk door behulp eener andere methode, bijv. die van d'Alembert, de integraal der herleide vergelijking aan te vullen, terwijl bij de methode van de variatie der standvastigen onmiddellijk tot de integratie der niet-herleide vergelijking kan worden overgegaan. Zoo kan volgens deze methode de vergelijking

$$y''' - 3\,y'' + 3\,y' - y = F(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (116)$$

aldus worden geïntegreerd: voor de équation caractéristique vindt men

$$m^3 - 3\,m^2 + 3\,m - 1 = 0,$$

of

$$(m-1)^3 = 0;$$

dus drie wortels gelijk 1. Ce^x is dus eene bijzondere integraal der herleide vergelijking. Door nu

$$y = C\,e^x$$

als de algemeene integraal van de gegeven vergelijking aan te zien, verkrijgt men na substitutie

$$C''' = e^{-x}F(x),$$

en dus

$$C = \int^{(3)} e^{-x}\,F(x)\,dx^3 + \Gamma_3.$$

Bijgevolg voor de gezochte algemeene integraal

$$y = e^x \int^{(3)} e^{-x} F(x)\, dx^3 + e^x \Gamma_3.$$

Men zal steeds door de methode van de variatie der standvastigen tot zulk eene eenvoudige integratie geraken, wanneer de équation caractéristique slechts ééne groep gelijke wortels heeft; komen er echter meerdere zoodanige groepen in voor, dan past men met voordeel eerst de methode van d'Alembert en daarna die van Cauchy toe. Zoo zou de integratie van de straks behandelde vergelijking

$$y^{IV} + 2\, y'' + y = F(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (117)$$

door de methode van de variatie der standvastigen, na eene tamelijk omslachtige differentiatie van de integraal [58])

$$y = C_1\, Cos\, x + C_3\, Sin\, x,$$

voeren tot de beide voorwaardens-vergelijkingen

$$C_1'\, Cos\, x + C_3'\, Sin\, x = 0$$

en
$$C_1'\, Sin\, x - C_3'\, Cos\, x - 3C_1''\, Cos\, x - 3\, C_3''\, Sin\, x -$$
$$- C_1'''\, Sin\, x + C_3'''\, Cos\, x = F(x).$$

De bepaling der C's uit deze vergelijkingen, vereischt meer arbeid, dan de geheele integratie der gegeven vergelijking volgens de methode van Cauchy.

196. Behoudens eene enkele uitzondering, het geval waarin de équation caractéristique slechts eene enkele groep gelijke wortels heeft (zie ook § 156), is derhalve bij de integratie eener niet-herleide lineaire vergelijking met standvastige coëfficienten de toepassing van de methode van Cauchy (al of niet verbonden met die van d'Alembert), wat kortheid van bewerking aangaat, te verkiezen boven die van de variatie der standvastigen.

197. Gaan wij thans den arbeid na, dien men bij de toepassing van de Cauchy-Fouriersche methode op boven-

---

[58]) Voor de toepassing der methode van de variatie der standvastigen is het onverschillig, of men die bijzondere integraal schrijft in den vorm $y = C_1\, e^{ix} + C_2\, e^{-ix}$ of in den gegeven vorm.

genoemde vergelijkingen heeft te verrichten. Bij deze methode stelt men de bijzondere integraal vast in den vorm der dubbele integraal

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\beta_1}^{\beta_2} e^{(x-\beta)\alpha i}\,\psi\, d\alpha\, d\beta, \; . \; . \; . \; . \; (104)$$

en substitueert deze in de gegeven vergelijking; waardoor men verkrijgt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\beta_1}^{\beta_2} \Phi(\alpha i)\, e^{(x-\beta)\alpha i}\,\psi\, d\alpha\, d\beta = \mathrm{F}(x); \; . \; . \; (105)$$

en nu komt de geheele methode neer op het bepalen van ψ zoodanig, dat aan deze vergelijking identiek wordt voldaan.

Deze bepaling van ψ is het grootste bezwaar, dat aan de toepassing van de methode is verbonden; moest zulks dan ook bij elke bijzondere vergelijking geschieden, dan zou de methode als te omslachtig moeten verworpen worden, daar die bepaling met geene geringe moeilijkheden gepaard gaat. Dit is echter niet het geval: door analytische beschouwingen is aangetoond (Petzval, Bd. I. S. 84), dat aan de vergelijking (105) in het algemeen identiek zal worden voldaan door

$$\psi = \frac{\mathrm{F}(\beta)}{\Phi(\alpha i)},$$

zoodat men voor de gezochte bijzondere integraal vindt

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\beta_1}^{\beta_2} e^{(x-\beta)\alpha i}\,\frac{\mathrm{F}(\beta)}{\Phi(\alpha i)}\, d\alpha\, d\beta \; . \; . \; . \; (105^{a})$$

Heeft men dus de équation caractéristique, dan kan men onmiddellijk de bijzondere integraal opschrijven; zoo is bijv. voor de vergelijking

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = \mathrm{F}(x) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (118)$$

die bijzondere integraal

$$y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\beta_1}^{\beta_2} e^{(x-\beta)\alpha i}\,\frac{\mathrm{F}(\beta)}{(\alpha i)^3 - 2(\alpha i)^2 - \alpha i + 2}\, d\alpha\, d\beta.$$

In dezen vorm is zij echter meestal onbruikbaar, en deze omstandigheid maakt een tweede hoofd-bezwaar uit bij het gebruik van deze methode; om namelijk de gevonden integraal in een geschikten vorm te verkrijgen, moet vooreerst

$$\frac{1}{(\alpha i)^3 - 2\,(\alpha i)^2 - \alpha i + 2}$$

in gedeeltelijke breuken worden ontbonden, en dan de integraal in de som van drie andere worden verdeeld, die achtereenvolgens één dier breuken als factor hebben. Is, zooals ook bij de voorgaande methoden werd ondersteld, de algemeene integraal der herleide vergelijking bekend, en derhalve de équation caractéristique opgelost, dan bestaat bij de genoemde ontbinding geen analytisch bezwaar; toch is zij steeds, en inzonderheid in het geval van gelijke wortels, eenigszins omslachtig. Onderstel echter, dat deze ontbinding heeft plaats gehad en dat men daarvoor heeft gevonden

$$-\frac{1}{2(\alpha i - 1)} + \frac{1}{6(\alpha i + 1)} + \frac{1}{3(\alpha i - 2)},$$

dan kan men voor de bijzondere integraal schrijven, wanneer men de grenzen der integratie weglaat,

$$y = -\frac{1}{2}\iint e^{(x-\beta)\alpha i}\,\frac{\mathrm{F}(\beta)}{\alpha i - 1}\,d\alpha\,d\beta +$$
$$+\frac{1}{6}\iint e^{(x-\beta)\alpha i}\,\frac{\mathrm{F}(\beta)}{\alpha i + 1}\,d\alpha\,d\beta +$$
$$+\frac{1}{3}\iint e^{(x-\beta)\alpha i}\,\frac{\mathrm{F}(\beta)}{\alpha i - 2}\,d\alpha\,d\beta.$$

Om deze op de eenvoudigste wijze in een meer geschikten vorm te brengen, verdeelt men haar in drie deelen, en tracht door differentiatie, zooals in § 187 is aangewezen, te komen tot de differentiaal-vergelijkingen

$$z_1' - z_1 = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{F}(x),$$

$$z_2' + z_2 = \tfrac{1}{6}\,\mathrm{F}(x)$$

en $$z_3' - 2z_3 = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{F}(x),$$

wier integratie volstrekt geene moeilijkheden veroorzaakt; de som der verkregen integralen geeft alsdan met weglating van de standvastigen der integratie de gezochte bijzondere integraal.

198. Onderstelt men, dat in deze oplossing al de substituties en differentiaties waren volbracht, zoodanig als de methode ze vereischt, en vergelijkt men haar dan met de oplossingen van dezelfde vergelijking volgens de beide voorgaande methoden; dan zal men moeten instemmen, dat deze Cauchy-Fouriersche methode bij de toepassing op lineaire vergelijkingen met standvastige coëfficienten, in het geval van ongelijke wortels, zoowel in eenvoud als in kortheid van bewerking achter staat bij de methode van de variatie der standvastigen en à fortiori bij de eerste methode van Cauchy.

Heeft voorts de équation caractéristique één of meer groepen gelijke wortels, dan wordt daardoor de toepassing der Cauchy-Fouriersche methode omslachtiger, voornamelijk door de meerdere moeilijkheden, waarmede alsdan de ontbinding van $\frac{1}{\phi(\alpha i)}$ in gedeeltelijke breuken gepaard gaat. Dezelfde omstandigheid vereenvoudigt daarentegen de eerste methode van Cauchy en oefent in vele gevallen een gunstigen invloed uit op de toepassing van de methode van de variatie der standvastigen, zoodat ook in dit geval de eerste methode voor de beide laatste moet onderdoen.

199. Door de Cauchy-Fouriersche methode komt men echter onmiddellijk tot den volgenden eenvoudigen regel.

Om eene bijzondere integraal eener lineaire differentiaalvergelijking met standvastige coëfficienten te bepalen, ga men aldus te werk: zij

$$\phi(m) = 0$$

de équation caractéristique; ontbind alsdan

$$\frac{1}{\phi(m)}$$

in gedeeltelijke breuken; zij $\frac{N}{(m - m_a)^k}$ eene dier breuken; vermenigvuldig hierin den teller met het tweede lid der gegeven vergelijking $F(x)$, en den noemer met eene willekeurige afhankelijk veranderlijke z; vervang voorts m door het symbool d_x, en stel dan teller en noemer aan elkaar gelijk; hierdoor verkrijgt men de vergelijking

$$(d_x - m_a)^k z = NF(x);$$

integreer deze; de som der n aldus verkregen waarden voor z geeft de gezochte bijzondere integraal.

Integreert men volgens dezen regel de vergelijking

$$y^{IV} + 2y'' + y = F(x), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (117)$$

dan heeft men vooreerst

$$\phi(m) = m^4 + 2m^2 + 1 = 0,$$

of wat hetzelfde is

$$\phi(m) = (m + i)^2 (m - i)^2.$$

Verder vindt men

$$\frac{1}{\phi(m)} = -\frac{1}{4(m+i)^2} + \frac{i}{4(m+i)} - \frac{1}{4(m-i)^2} - \frac{i}{4(m-i)},$$

en dus de vier vergelijkingen

$$4(d_x + i)^2 z_1 = - F(x),$$

$$4(d_x + i) z_2 = i F(x),$$

$$4(d_x - i)^2 z_3 = - F(x)$$

en

$$4(d_x - i) z_4 = - i F(x).$$

Door de beide eerste vergelijkingen te vermenigvuldigen met e^{ix} en de beide laatste met e^{-ix}, verkrijgt men

$$d_x^2 (e^{ix} z_1) = - \tfrac{1}{4} e^{ix} F(x),$$

$$d_x (e^{ix} z_2) = \tfrac{i}{4} e^{ix} F(x),$$

$$d_x^2 (e^{-ix} z_3) = -\tfrac{1}{4} e^{-ix} F(x)$$

en $$d_x (e^{-ix} z_4) = -\tfrac{1}{4} e^{-ix} F(x);$$

en na integratie

$$z_1 = -\tfrac{1}{4} e^{-ix} \int^{(2)} e^{ix} F(x)\, dx^2,$$

$$z_2 = \tfrac{1}{4} e^{-ix} \int e^{ix} F(x)\, dx,$$

$$z_3 = -\tfrac{1}{4} e^{ix} \int^{(2)} e^{-ix} F(x)\, dx^2$$

en $$z_4 = -\tfrac{1}{4} e^{ix} \int e^{-ix} F(x)\, dx.$$

De som dezer waarden van z_1, z_2, z_3 en z_4 geeft nu de bijzondere integraal der gegeven vergelijking.

Vergelijkt men nu ook deze oplossing met die van § 194, dan blijkt onmiddellijk, dat zij deze laatste in ingewikkeldheid en omslachtigheid ver overtreft, zoodat de bovengenoemde regel, hoe eenvoudig ook in uitdrukking, bij de toepassing op lineaire vergelijkingen met standvastige coëfficienten, in bruikbaarheid moet onderdoen voor de eerste methode van Cauchy [59]).

200. Bij de afleiding van de algemeene integraal eener lineaire vergelijking met standvastige coëfficienten, uit de algemeene integraal der overeenkomstige herleide vergelijking, is derhalve, behoudens eenige vroeger genoemde uitzonderingen, de eerste Cauchysche methode om de meerdere eenvoudigheid en kortheid van bewerking te verkiezen boven de beide andere aanvullings-methoden, die hetzelfde doel beoogen.

201. Bij de voorgaande klasse van lineaire vergelijkingen verkreeg de methode van Cauchy een groot voordeel op de beide overige methoden door den bijzonderen vorm, waarin men de algemeene integraal der herleide vergelijking kon schrijven, ten gevolge van de omstandigheid,

---

[59]) Bovendien kan deze regel gemakkelijk uit de uitkomst van de algemeene integratie volgens deze laatste methode worden afgeleid.

dat deze algemeene integraal slechts exponentieele vormen, Sinussen en Cosinussen van dezelfde hoeken, en termen van den vorm

$$e^{mx}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots)$$

kan bevatten. Dit voordeel vervalt echter zoodra de coëfficienten der vergelijking veranderlijk zijn, en daardoor de bijzondere integralen in geheel andere vormen voorkomen; zijn bijv. die coëfficienten van den vorm

$$A_k x^k,$$

dan kan men zelfs den in de integraal in het geval van gelijke bijzondere integralen voorkomenden term

$$f(x) \Sigma C_k (lx)^k$$

niet in den vorm

$$f(x - \alpha) \Sigma C_k [l(x - \alpha)]^k$$

bezigen, daar deze beide uitdrukkingen niet meer hetzelfde beteekenen.

Een nog grooter overwicht verkreeg bij de vorige beschouwingen de methode van Cauchy boven die van de variatie der standvastigen door de meerdere eenvoudigheid en gemakkelijkheid, waardoor men tot de voorwaardensvergelijkingen geraakt, die door oplossing de waarden der standvastigen opleveren. Dit voordeel laat zich ook gevoelen bij de vergelijkingen met veranderlijke coëfficienten. Heeft men bijv. de vergelijking

$$4x^3 y''' + 8x^2 y'' - xy' + y = F(x), \quad . \; . \; . \; . \quad (119)$$

en is voor de integraal der herleide vergelijking gevonden

$$y = C_1 x + C_2 x^{-\frac{1}{2}} + C_3 x^{\frac{1}{2}},$$

dan bepaalt men bij de methode van de variatie der standvastigen de waarden van y', y'' en y''' in de onderstelling, dat de C's van x afhangen; daarbij onderwerpt men echter deze aan twee voorwaarden, die teweeg brengen, dat de verkregen waarden van y' en y'' dezelfde zijn, als wanneer

de differentiatie had plaats gehad in de onderstelling dat de C's niet van x afhangen; terwijl die voorwaarden zelve niets anders zijn dan de waarden van y en y', nadat in deze C_1, C_2 en C_3 door C_1', C_2' en C_3' vervangen zijn, gelijk nul gesteld, derhalve

$$C_1' x + C_2' x^{-\frac{1}{2}} + C_3' x^{\frac{1}{2}} = 0$$

en

$$C_1' - \tfrac{1}{2} C_2' x^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2} C_3' x^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

De derde voorwaardens-vergelijking wordt door de substitutie van de waarden van y, y', y'' en y''' in de gegeven vergelijking verkregen; maar is in den grond niets anders dan de waarde van y'', nadat deze dezelfde verandering heeft ondergaan, gelijk gesteld aan het tweede lid der vergelijking, nadat deze eerst zoodanig herleid is, dat de coëfficient van het hoogste differentiaal-quotient één is; dus

$$\tfrac{3}{4} C_2' x^{-\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{4} C_3' x^{-\frac{3}{2}} = \frac{F(x)}{4\, x^3}.$$

Klaarblijkelijk zijn deze voorwaardens-vergelijkingen dezelfde als bij de eerste Cauchysche methode; alleen de afleiding geschiedt bij de beide methoden op verschillende wijze; en bij de vergelijkingen, wier coëfficienten in den vorm

$$A_k (a + bx)^k$$

begrepen zijn, overtreft deze Cauchysche methode die van de variatie der standvastigen dan ook alleen in de meerdere eenvoudigheid dier afleiding en den daaruit volgenden snelleren afloop der integratie.

202. Wat de toepassing van de Cauchy-Fouriersche methode op deze klasse van lineaire vergelijkingen betreft, is het voldoende op te merken, dat men daartoe door de substitutie

$$a + bx = e^u$$

de vergelijking vooraf tot eene met standvastige coëfficienten moet herleiden, voordat men de methode kan toepassen

(zie § 188). In verband met het vroeger gezegde blijkt uit deze opmerking voldoende, dat bij de bovengenoemde lineaire vergelijkingen deze methode in kortheid en eenvoud van bewerking voor de beide andere moet onderdoen.

203. Hebben de coëfficienten der differentiaal-vergelijking den vorm

$$a_k + b_k x + c_k x^2 + \ldots + p_k x^l ,$$

dan kunnen hare bijzondere integralen in verschillende vormen voorkomen, naar gelang van de methode, die men voor de integratie bezigt of van de bijzondere waarden, die men aan de coëfficienten toekent. Van de verschillende vormen der bijzondere integralen der herleide vergelijking hangt het nu voornamelijk af, welke aanvullings-methode het snelst tot het doel zal voeren.

Uit het voorgaande volgt onmiddellijk, dat, wanneer de algemeene integraal der herleide vergelijking den vorm

$$y = \sum_0^p C_k x^k + \sum_1^q C_{k_1} e^{m_{k_1} x} + \sum_1^r C_{k_2} \, Sin \, k_2 x + \sum_1^s C_{k_3} \, Cos \, k_3 x$$

heeft, de methode van Cauchy zonder twijfel minder arbeid vereischt, dan de beide overige methoden; maar dit zal ook dan nog het geval zijn, wanneer die integraal eene gewone algebraïsche functie is van x, die al of niet logarithmische bestanddeelen bevat.

De vergelijkingen, die wij hier op het oog hebben, worden in gesloten vorm voor verreweg het grootste gedeelte door de methode der bepaalde integralen geïntegreerd; en voor zoover de bijzondere integraal niet in eene der bovengenoemde vormen verschijnt, of tot eene dier vormen kan worden teruggebracht [60]), verkrijgt men dan ook de bijzondere integralen meestal in den vorm van bepaalde

---

[60]) Door de methode der symbolen wordt de niet-herleide vergelijking onmiddellijk opgelost, zoodat men hierbij geene aanvullings-methode behoeft.

integralen; somwijlen slechts in den vorm van differentiaal-quotienten met willekeurige indices. Beide vormen zijn ongeschikt om op de voorgaande wijzen behandeld te worden; de laatste zelfs leent er zich in dien vorm volstrekt niet toe; zoodat men bij den eersten vorm met voordeel een anderen weg zal kunnen inslaan, iets wat bij den laatsten vorm zelfs noodzakelijk is.

Tot het betreden van zulk een anderen weg leent zich echter de Cauchysche methode niet. Bovendien zijn de herleide vergelijkingen met veranderlijke coëfficienten, wier algemeene integraal door eene hoofd-methode kan gevonden worden, bijna uitsluitend van de tweede orde, en juist bij die vergelijkingen geeft de gewijzigde methode van de variatie der standvastigen zeer spoedig de gezochte algemeene integraal in den vorm van

$$y = y_1 \int d_x \frac{y_2}{y_1} dx \int \frac{X dx}{y_1 d_x \frac{y_2}{y_1}}; \quad \ldots\ldots \quad (120)$$

zoodat wij bij deze lineaire vergelijkingen met veranderlijke coëfficienten, voor zoover de werkelijke toepassing betreft, aan de methode van de variatie der standvastigen de voorkeur moeten geven boven die van Cauchy. Ook in het geval dat de algemeene integraal der herleide vergelijking alleen in den vorm van reeksen werd verkregen, wordt nimmer de methode van Cauchy toegepast, ten gevolge van de bezwaren, die daarbij aan hare toepassing zijn verbonden; men maakt in dit geval ook steeds gebruik van de gewijzigde methode van de variatie der standvastigen, voor zoover het namelijk niet gelukt op eene meer eenvoudige wijze onmiddellijk eene bijzondere integraal der niet-herleide vergelijking te bepalen.

204. Door een enkelen blik op § 188 overtuigt men zich, dat de Cauchy-Fouriersche methode, voor zoover de toepassing betreft op bovengenoemde vergelijkingen, in zeer vele opzichten overeenkomt met de methode der be-

paalde integralen. Zij kan dan ook in 't algemeen steeds worden toegepast, wanneer de onderstelling van Laplace

$$y = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\,\mathrm{U}\,du$$

tot minstens ééne bijzondere integraal voert.

Die toepassing vereischt echter in den regel meer arbeid dan de integratie der herleide vergelijking zelve en kan dan ook alleen met voordeel geschieden, wanneer zij hand aan hand gaat met de integratie der herleide vergelijking door genoemde methode van Laplace. Heeft men bijv. de vergelijking

$$y''' - (1-x)\,y' - 2\,xy = \mathrm{F}(x), \quad \ldots\ldots (121)$$

dan vindt men bij de herleide vergelijking door de substitutie van Laplace

$$\mathrm{U}_0 = u^3 - u$$

en

$$\mathrm{U}_1 = u - 2;$$

derhalve

$$\frac{\mathrm{U}_0}{\mathrm{U}_1} = u^2 + 2u + 5 + \frac{10}{u-2},$$

en

$$\int \frac{\mathrm{U}_0}{\mathrm{U}_1}\,du = \tfrac{1}{3}\,u^3 + u^2 + 5u + l(u-2)^{10}.$$

Hieruit volgt

$$\mathrm{U} = (u-2)^9\, e^{\frac{1}{3}u^3 + u^2 + 5u},$$

en dus voor de integraal der herleide vergelijking

$$y = \int_{u_1}^{u_2} (u-2)^9\, e^{\frac{1}{3}u^3 + u^2 + (x+5)u}\,du;$$

waarbij de grenzen moeten bepaald worden uit

$$(u-2)^{10}\, e^{\frac{1}{3}u^3 + u^2 + (x+5)u} = 0,$$

aan welke vergelijking voldaan wordt, behalve door

$$u = 2,$$

door de wortels der vergelijking

$$u^3 = -\infty.$$

Voor de toepassing der Cauchy-Fouriersche methode heeft men nu

$$\psi = QU,$$

en dus voor de bijzondere integraal der gegeven niet-herleide vergelijking

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{u_1}^{u_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\beta_1}^{\beta_2} Q\,(u-2)^9\, e^{\frac{1}{3}u^3 + u^2 + (x+5)u}\, du\, d\alpha\, d\beta,$$

waarin

$$u_2 = \alpha i,$$

en u_1 gelijk is aan eene der bovengevonden grenzen.

De eenige functie, die dus nog bepaald moet worden, is Q. Volgens § 188 heeft men echter

$$Q = (\alpha i - 2)^{-10}\, e^{[\frac{1}{3}\alpha^3 + \alpha^2 - (5+\beta)\alpha]i}\, F(\beta);$$

zoodat de substitutie dezer waarde in de voorgaande uitdrukking de gezochte bijzondere en daarmede ook de algemeene integraal der. vergelijking oplevert.

205. De meerdere algemeenheid van het beginsel, waarop de methode van de variatie der standvastigen steunt, geeft aan deze een veel uitgebreider toepassing dan aan de beide methoden van Cauchy. Terwijl door deze alleen de algemeené integraal eener niet-herleide vergelijking kan worden bepaald, wanneer de algemeene integraal der herleide vergelijking bekend is, kan de eerste ook dan nog die algemeene integraal opleveren, wanneer slechts een of meer bijzondere integralen dezer herleide vergelijking gegeven zijn. Daarenboven kan de methode van de variatie der standvastigen worden toegepast, wanneer het gelijk zijn van de wortels der équation caractéristique de volledige toepassing eener methode verhindert, of wanneer andere omstandigheden zich voordoen, die genoemde toepassing in

den weg staan. In algemeenheid van toepassing, zelfs op de lineaire vergelijkingen, moeten dus de beide andere methoden voor haar onderdoen. Maar ook deze staan in dit opzicht niet gelijk: voor de toepassing van de eerste Cauchysche methode is het volstrekt noodzakelijk, dat men vooraf de herleide vergelijking algemeen geïntegreerd hebbe, en dat daarbij de bijzondere integralen niet voorkomen in den vorm van differentiaal-quotienten met willekeurige indices; — voor de mogelijkheid van de toepassing van de Cauchy-Fouriersche methode is die algemeene integratie geenszins noodig, en is het onverschillig in welken vorm de bijzondere integralen der herleide vergelijking voorkomen, wijl van die bijzondere integralen toch geen gebruik behoeft gemaakt te worden: bijna zonder uitzondering levert deze methode eene bijzondere integraal. In uitgebreidheid van toepassing staat zij dus boven de eerste methode van Cauchy.

---

206. De beschouwingen over de aanvullings-methoden voeren ons derhalve tot deze uitkomst: in eenvoudigheid van beginsel, in algemeenheid van opvatting, in uitgebreidheid van toepassing en in theoretische waarde staat de methode van de variatie der standvastigen veel hooger dan de overige aanvullingsmethoden, die gezamenlijk nog niet zulk een uitgebreiden werkkring hebben, als zij alleen. Waar deze kunnen worden toegepast, verdienen zij echter in vele gevallen boven haar de voorkeur door de meerdere eenvoudigheid en kortheid der bewerking. Zoo vonden wij dat de methode van d'Alembert zich door deze eigenschappen in hooge mate boven haar onderscheidt en in sommige gevallen zelfs tot een veel eenvoudiger uitkomst voert.

De methode van Cauchy leidt bij de lineaire vergelijkingen met standvastige coëfficienten en die met coëffi-

cienten van dén vorm $A_k(a+bx)^k$ spoediger tot de gezochte algemeene integraal; iets wat met de Cauchy-Fouriersche methode het geval is, wanneer deze hand aan hand kan gaan met de integratie-methode van Laplace.

207. De methode van de variatie der standvastigen omvat echter, zooals wij boven opmerkten, deze drie overige; bovendien is zij van toepassing bij niet-lineaire vergelijkingen, en in die gevallen, waarin de gevonden bijzondere integralen — ten gevolge van divergentie der reeksen, of ondoorloopendheid der integralen, of van andere oorzaken — in een aantal kleiner dan n voorkomen. Zij vult dus in den uitgebreidsten zin de integraal der herleide vergelijking zelve aan, en vervult dan daarbij de rol eener hoofd-methode, met dit onderscheid, dat het voor hare toepassing een noodzakelijk vereischte is, dat minstens ééne bijzondere integraal dier herleide vergelijking gevonden is of geldt.

De gang der integratie bij de methode van de scheiding der veranderlijken en bij die van den integreerenden factor maakt zulk een verloren gaan van bijzondere integralen onmogelijk; bij de methoden der reeksen komt zulks echter dikwijls voor, en wij hebben in § 157 reeds met een voorbeeld aangewezen, hoe de methode van de variatie der standvastigen zeer geschikt is, om daarbij de integraal aan te vullen. Gemakkelijker geschiedt zulks echter, wanneer de overgebleven bijzondere integralen in een gesloten vorm voorkomen. Men maakt daarbij steeds gebruik van den gewijzigden vorm der methode, wijl bijna alle vergelijkingen met veranderlijke coëfficienten (mits deze niet tot den vorm $A_k(a+bx)^k$ behooren), die in de werkelijke toepassing voorkomen of ook die geïntegreerd werden, niet hooger dan tot de tweede orde opklimmen (§ 159). Zoo levert bijv. de methode van Liouville voor eene geheele waarde van p steeds op eene zeer eenvoudige wijze eene bijzondere integraal in den vorm van eene geheele

algebraïsche functie of van een differentiaal-quotient met een geheelen positieven index, welk laatste bij eene vergelijking wier coëfficienten bepaalde getallen-waarden hebben, tot eene gewone algebraïsche functie kan worden teruggebracht. In beide gevallen levert de methode van de variatie der standvastigen gemakkelijk en spoedig de algemeene integraal.

Is daarbij de vergelijking niet-herleid, bijv.

$$(1 + x^2)\, y'' + y' - 6y = x^3, \quad \ldots\ldots \quad (122)$$

dan kan men de methode van de variatie der standvastigen met die van Liouville verbinden door eerst eene bijzondere integraal

$$y = C_4\, (x^3 + \tfrac{3}{4}\, x^2 + \tfrac{5}{4}\, x + \tfrac{11}{24})$$

der herleide vergelijking te bepalen, en dan terstond voor de veranderlijke C_4 deze waarde in de vergelijking te substitueeren, om zoodoende onmiddellijk tot de integratie der niet-herleide vergelijking over te gaan. Korter echter kan men eene bijzondere integraal der niet-herleide vergelijking bepalen door de p-malige differentiatie (hier is $p = 3$ of -2) werkelijk uit te voeren, de komende vergelijking in z (zie § 134) te integreeren, en vervolgens uit de verkregen waarde van z die van y af te leiden. Heeft hierbij p eene positieve en eene negatieve geheele waarde, zooals bij bovenstaande vergelijking, dan is de laatste te verkiezen. Neemt men dan ook boven $p = -2$, dan verkrijgt men, wijl ook hierbij de complementaire functie Γ_2 mag verwaarloosd worden,

$$(1 + x^2)\, z' + (1 - 4x)\, z = \tfrac{1}{20}\, x^5;$$

en dus

$$z = e^{-\int \frac{1-4x}{1+x^2} dx} \left(C_5 + \int \frac{x^5\, dx}{1 + x^2}\, e^{\int \frac{1-4x}{1+x^2} dx} \right);$$

waaruit men voor de gezochte bijzondere integraal vindt

$$y = d_x^{\,2}\left[e^{-\int \frac{1-4x}{1+x^3} dx} \left(C_5 + \int \frac{x^5\, dx}{1+x^2} e^{\int \frac{1-4x}{1+x^2} dx} \right) \right].$$

Alleen ingeval de positieve waarde van p tot eene vergelijking in z voerde, wier integraal in een algebraïschen of exponentieelen vorm zonder integraal-teeken kan worden voorgesteld, en dus het tweede lid bij de differentiatie ook verdween, zou die positieve waarde van p de voorkeur kunnen verdienen boven de negatieve; maar verdwijnt het tweede lid door de differentiatie, dan is de vergelijking in z dezelfde als voor de herleide vergelijking, en verkrijgt men dus of slechts eene bijzondere integraal dezer laatste, of men moet van de complementaire functie gebruik maken, en dus den boven aangewezen weg inslaan, zoodat alsdan de positieve waarde van p niets oplevert. Men zal dus, of de negatieve waarde van p bezigen, of van de methode van de variatie der standvastigen gebruik maken. Komt bij de toepassing van de methode van Liouville op eene vergelijking der tweede orde de eene bijzondere integraal voor in den vorm van een differentiaal-quotient met geheelen index, dan voert de aanwending van de methode van de variatie der standvastigen dikwijls tot den eenvoudigsten vorm der tweede bijzondere integraal, (Spitzer, S. 19, 37, 38); somtijds echter voert zij tot zulke ingewikkelde vormen, dat men zoo mogelijk op andere wijzen die integraal tracht aan te vullen (zie bijv. Spitzer, S. 36; 1e Forts. S. 85).

Bij de methode der bepaalde integralen gebeurt het zeer dikwijls, dat één of meer bijzondere integralen verloren gaan [61]). Komen de overblijvende integralen daarbij voor in den vorm van bepaalde integralen, dan tracht men steeds door eene andere hoofdmethode de vergelijking

[61]) Men merke op, dat hierbij geen sprake is van het gelijk worden van twee of meer bijzondere integralen.

zóó te herleiden, dat de methode op de nieuwe vergelijking kan worden toegepast, om zoodoende het vereischte aantal bijzondere integralen te verkrijgen (zie bijv. § 103 en Spitzer, 1e Forts. S. 64 en 65). Gelukt dit niet, dan bezigt men de methode van de variatie der standvastigen, liever dan van die van den integreerenden factor gebruik te maken; daar alsdan de integreerende vergelijking (alleen in getalwaarden der coëfficienten van de gegevene verschillende) in bijna alle gevallen tot bepaalde integralen als integreerende factoren voert; en deze zich daarvoor in 't algemeen alles behalve gemakkelijk en geschikt leenen (§ 103).

De meest passende vorm van de overblijvende bijzondere integralen voor de toepassing van de methode van de variatie der standvastigen is die van gewone exponentieele functiën $e^{\alpha x^\beta}$, vooral wanneer daarbij in alle x in dezelfde macht voorkomt. Voorbeelden hiervan vindt men o. a. bij Spitzer (S. 35; 1e Forts. S. 84; 2e Forts. S. 67, u. s. w.).

C. Slotbeschouwing.

208. Uit de voorgaande beschouwing blijkt, dat van al de aanvullings-methoden die van de variatie der standvastigen de eenige is, die in alle gevallen de hoofd-methoden aanvult. Van daar dan ook, dat men aan haar zulk eene hooge waarde toekent, en dat men haar veelal zelfs boven sommige der genoemde hoofd-methoden plaatst. In haren werkkring is zij dan ook veel algemeener dan deze, doordat zij zich voegt naar den aard der vergelijking, tot welker integratie zij moet medewerken, of naar het doel, dat men door hare toepassing tracht te bereiken. Thans zullen wij haar, of de aanvullings-methoden, die haar in sommige gevallen kunnen vervangen, nog beschouwen in verband met eenige dier hoofd-methoden, voor zoover hare

toepassing betreft op de lineaire vergelijkingen met standvastige coëfficienten. Voor de overige lineaire vergelijkingen verwijzen wij naar het gezegde in § 204 en § 207.

209. Bij geene enkele klasse van niet-herleide lineaire vergelijkingen kan de integratie op zoo onderscheidene wijzen geschieden, als bij die met standvastige coëfficienten. In de eerste plaats kan men daarbij gebruik maken van de methode van den integreerenden factor. Daarbij geraakt men langs den zuiversten en meest wetenschappelijken weg tot de algemeene integraal. Die weg is echter eene der omslachtigste, en daardoor voor den practicus alles behalve de verkieslijkste. Hetzelfde is het geval met den tweeden weg, dien men zou kunnen inslaan, de toepassing van de methode der symbolen (zie § 108). Alleen in enkele gevallen levert de toepassing dezer laatste methode op eene meer eenvoudige wijze de algemeene integraal; wanneer namelijk het tweede lid behoort tot eene der vormen, die wij in § 156 vermeldden. Is bijv. het tweede lid eene geheele rationeele functie van x, dan volgt terstond uit de vergelijking

$$\Phi(d_x)\, y = X \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XVIII)}$$

de algemeene integraal

$$y = [\Phi(d_x)]^{-1} X + [\Phi(d_x)]^{-1} 0;$$

zoodat men bij de algemeene integraal der herleide vergelijking slechts ééne bijzondere integraal der niet-herleide heeft te voegen. Om deze laatste te verkrijgen, ontwikkelt men

$$[\Phi(d_x)]^{-1}$$

in eene reeks, gerangschikt volgens de opklimmende machten van d_x, en volvoert vervolgens deze bewerkingen op X. Zoo geeft bijv. de vergelijking

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = x^3 + 2x \quad \ldots\ldots \quad (123)$$

voor de integraal der herleide vergelijking

$$[\Phi(d_x)]^{-1}\,0 = C_1\,e^{x} + C_2\,e^{-x} + C_3\,e^{2x};$$

en voor de bijzondere integraal der niet-herleide

$$[\Phi(dx)]^{-1}\,X = [d^3{}_x - 2d^2{}_x - d_x + 2]^{-1}(x^3 + 2x) =$$
$$= [\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}d_x + \tfrac{5}{8}d^2{}_x + \tfrac{5}{16}d^3{}_x + \ldots]\,(x^3 + 2x) =$$
$$= \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{3}{4}x^2 + \tfrac{19}{4}x + \tfrac{19}{8};$$

welke vorm eenvoudiger is dan die, welke door de hulp der aanvullings-methoden wordt gevonden. Voor de integratie dezer vergelijking had men behalve van de aanvullings-methoden ook gebruik kunnen maken van de methode van de verhooging van de orde der differentiaal-vergelijking, en daarbij zou eene vier-malige differentiatie ons onmiddellijk geleid hebben tot de vergelijking

$$y^{\text{VII}} - 2y^{\text{VI}} - y^{\text{V}} + 2y^{\text{IV}} = 0.$$

De substitutie van de integraal dezer vergelijking in de gegevene en de daarmede gepaard gaande bepaling der overtollige standvastigen vereischt echter hierbij meer werk dan de voorgaande methode. Alleen wanneer de exponenten van x onbepaald zijn, of x tot eene tamelijk hooge macht opklimt, kan deze methode de voorkeur verdienen boven de vorige. Bovendien vereischt zij meer arbeid dan de methode van Cauchy, hoewel men haar in dit geval dikwijls boven deze laatste verkiest, (wijl zij onmiddellijk de gezochte integraal oplevert in een vorm, waarin geene integraal-teekens voorkomen, iets wat bij deze laatste methode niet het geval is); behalve in het geval dat de équation caractéristique gelijke of complexe wortels heeft, daar zulks bij de methode van Cauchy de bewerking zeer vereenvoudigt, en op de methode van de verhooging der orde eer een nadeeligen invloed uitoefent.

Bij de integratie van genoemde lineaire vergelijkingen ga men dus in het algemeen aldus te werk: door de methode der symbolen bepaalt men op de boven beschreven wijze eene bijzondere integraal der niet-herleide vergelij-

king en daarna door middel van de substitutie van den integreerenden factor

$$y = e^{mx},$$

zoo noodig verbonden met de methode van d'Alembert, de algemeene integraal der herleide; de som der beide verkregen integralen geeft alsdan de gezochte algemeene integraal.

210. Heeft het tweede lid den vorm Ae^{px}, en is dus de vergelijking

$$\phi(d_x)\, y = A\, e^{px}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{XVIII}^b)$$

dan heeft men

$$y = [\phi(d_x)]^{-1} A\, e^{px} + [\phi(d_x)]^{-1}\, 0,$$

waarvoor men kan schrijven (Murphy, Philos. Transact. 1837. p. 197)

$$y = e^{px}\, [\phi(d_x + p)]^{-1} A + [\phi(d_x)]^{-1}\, 0.$$

Zoo is in de vergelijking

$$y^{\text{IV}} + 2y'' + y = 6\, e^{2x}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (124)$$

$$\phi(d_x) = d^4_x + 2d^2_x + 1;$$

en dus ook, daar $p = 2$ is,

$$\phi(d_x + 2) = d^4_x + 10d^3_x + 26d^2_x + 40d_x + 25,$$

waarvan echter alleen de laatste term $\phi(2)$ behoeft bepaald te worden; voorts is

$$[\phi(d_x + 2)]^{-1} = \tfrac{1}{25} + \ldots\ldots$$

en dus de bijzondere integraal der niet-herleide vergelijking

$$y = \tfrac{6}{25} e^{2x},$$

welke met $[\phi(d_x)]^{-1}\, 0$ voor de algemeene integraal geeft

$$y = \tfrac{6}{25} e^{2x} + \mathit{Cos}\, x\, (C_1 + C_2\, x) + \mathit{Sin}\, x\, (C_3 + C_4\, x).$$

Deze handelwijze levert spoediger de algemeene integraal der vergelijking dan de gewone aanvullings-methoden (§ 194), vooral wanneer men voor de gezochte bijzondere integraal terstond neemt

$$y = e^{px}\,[\phi(p)]^{-1}\,A,$$

wat steeds mag, wijl A standvastig en dus reeds de eerste differentiaal gelijk nul is.

211. Op dezelfde wijze kan men te werk gaan, wanneer het tweede lid uit A *Sin px* of A *Cos px* bestaat, indien men deze tot exponentieele vormen terugbrengt. Kan echter de vergelijking zelve geschreven worden in den vorm

$$\phi(d^2_x)\,y = Sin\,px\ [\text{of} = Cos\,px],$$

dan gaat men liever aldus te werk:

$$y = [\phi(d^2_x)]^{-1}\,Sin\,px + [\phi(d^2_x)]^{-1}\,0,$$

waaruit volgt

$$y = [\phi(-p^2)]^{-1}\,Sin\,px + [\phi(d^2_x)]^{-1}\,0.$$

Zoo geeft bijv. de vergelijking

$$y^{\text{IV}} + 2y'' + y = Sin\,px \quad \ldots\ldots\ldots \quad (125)$$

onmiddellijk voor de bijzondere integraal

$$y = \frac{Sin\,px}{p^4 - 2p^2 + 1}.$$

Heeft men zooals in de voorgaande voorbeelden met eenvoudige vergelijkingen te doen, wier tweede lid, òf slechts lage machten van x, òf slechts een enkelen term bevat, dan kan men dus altijd met voordeel van de methode der symbolen gebruik maken. Komen in het tweede lid echter hoogere machten van x of verbonden termen, zooals

$$A_0\,x^q + A_1\,Sin\,p_1 x + A_2\,Sin\,p_2\,x + \ldots .$$

of

$$A_0\,e^{px} + A_1\,e^{-px} + A_2\,Cos\,p_2\,x + \ldots .$$

voor, dan voert de methode van de verhooging van de orde der vergelijking spoediger tot het doel, doordien hierbij het tweede lid niet verdeeld wordt, zooals zulks in § 156 is aangegeven, maar de vergelijking steeds als eene enkele beschouwd blijft. De eliminatie van het tweede lid geschiedt, blijkens de voorbeelden van § 126 en vv. zeer

spoedig, en de bepaling der overtollige standvastigen vereischt ook dikwijls niet meer werk, dan de toepassing van de methode van Cauchy. In het algemeen zou echter deze laatste methode door den minderen arbeid de voorkeur verdienen, ware het niet, dat de methode van de verhooging der orde, ten gevolge van een geheel anderen gang van bewerking, de gezochte integraal in een veel eenvoudigeren vorm (zonder integraalteeken) opleverde.

Terwijl echter de aanvullings-methoden voor elke waarde van het tweede lid de integraal der niet-herleide vergelijking helpen bepalen, kan de methode van de verhooging der orde alleen in de bijzondere gevallen van § 126 en vv. daarvoor worden aangewend; zoodat wat algemeenheid van toepassing in dit opzicht betreft deze laatste verre beneden de eerste staat. Alleen de methode der symbolen en die van den integreerenden factor wedijveren in dit opzicht met de aanvullings-methoden; vooral die van den integreerenden factor is voor deze laatste van het hoogste gewicht, doordat zij elken twijfel heeft weggenomen aangaande de juistheid van de uitkomsten, die de laatste bij de lineaire vergelijkingen met standvastige coëfficienten opleveren.

212. Voordat wij hiermede onze beschouwing over de integratie-methoden eindigen, willen wij doen opmerken, hoe men in sommige gevallen de integratie eener niet-herleide vergelijking terstond kan terugbrengen tot die der overeenkomstige herleide vergelijking.

Is bijv.

$$(d_x^n + X_{n-1}\, d_x^{n-1} + \ldots\ldots + X_1\, d_x)\,\frac{X}{X_0} = 0,$$

dan zal de vergelijking

$$y^{(n)} + X_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots. + X_1\, y' + X_0\, y = X \quad . \; . \; . \; (6^a)$$

door de substitutie van

$$y = y_1 + \frac{X}{X_0}$$

overgegaan in

$$y_1^{(n)} + X_{n-1}\, y_1^{(n-1)} + \ldots\ldots + X_1\, y_1' + X_0\, y_1 = 0.$$

Vooral bij vergelijkingen met standvastige coëfficienten is deze substitutie van belang: is bijv. de vergelijking

$$y^{(n)} + A_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots + A_0\, y = A, \quad . \; . \; (126)$$

dan geeft de substitutie van

$$y = y_1 + \frac{A}{A_0}$$

onmiddellijk

$$y_1^{(n)} + A_{n-1}\, y_1^{(n-1)} + \ldots\ldots + A_0\, y_1 = 0.$$

Evenzoo gaat de vergelijking

$$y^{(n)} + A_0\, y = Ax^{n-a} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (127)$$

voor eene geheele waarde van a, $-1 < a < n+1$, door de substitutie van

$$y = y_1 + \frac{A}{A_0}\, x^{n-a}$$

over in de herleide

$$y_1^{(n)} + A_0\, y_1 = 0.$$

Is in de vergelijking

$$y^{(n)} + A_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots + A_0\, y = X \; . \; . \; (95a)$$

het tweede lid $Ae^{\pm px}$ en voldoen de coëfficienten aan de voorwaarde

$$p^n \pm A_{n-1}\, p^{n-1} + A_{n-2}\, p^{n-2} \pm \ldots\ldots\ldots + (\pm 1)^n A_0 = 0,$$

dan zal de substitutie van

$$y = y_1 + \frac{A}{A_0}\, e^{\pm px}$$

tot eene herleide vergelijking voeren; hetzelfde is het geval met de substitutie van

$$y = y_1 + \frac{A}{A_0} \left\{ \begin{matrix} Sin \\ Cos \end{matrix} \right\} px,$$

wanneer het tweede lid gelijk is aan

$$A \left\{ \begin{matrix} Sin \\ Cos \end{matrix} \right\} px,$$

en voldaan wordt aan de voorwaarden

$$p^n - A_{n-2}p^{n-2} + A_{n-4}p^{n-4} - \dots\dots\dots = 0$$

en $$A_{n-1}p^{n-1} - A_{n-3}p^{n-3} + A_{n-5}p^{n-5} - \dots\dots = 0,$$

enz.

213. In de voorgaande bladzijden hebben wij de voornaamste methoden beschouwd en vergeleken, door welke men de functie kan bepalen, die op de meest algemeene wijze aan eene gegeven differentiaal-vergelijking voldoet; of, wat hetzelfde is, door welke men de algemeene vergelijking der kromme lijnen kan vinden, die in al hare punten de eigenschap bezitten, welke door de differentiaal-vergelijking wordt uitgedrukt. Wij hebben daarbij aangewezen, hoe, ingeval de integratie in een gewonen eindigen vorm niet mogelijk is, men nog dikwijls òf de integratie tot differentiaal-quotienten of quadraturen kan terugbrengen, òf de gezochte integraal geheel of gedeeltelijk in convergente reeksen kan ontwikkelen, òf zelfs somtijds haar in bepaalde integralen kan uitdrukken, die, tusschen bepaalde grenzen genomen, vatbaar zijn om voor elke waarde van x met eene onbegrensde nauwkeurigheid benaderd te worden.

Wij hebben daarbij gezien, dat het voor sommige dier methoden onverschillig is, of de gegeven differentiaal-vergelijking in den herleiden of in den niet-herleiden vorm voorkomt; dat daarentegen andere alleen op herleide vergelijkingen kunnen worden toegepast, voor welk laatste geval wij de methoden hebben aangegeven, waardoor deze omstandigheid kan worden verholpen, of m. a. w. waardoor uit de integraal der herleide vergelijking die der niet-herleide kan worden opgemaakt.

214. Er zijn echter differentiaal-vergelijkingen, op welke geene der bekende integratie-methoden kan worden toegepast: desniettegenstaande bepaalt zulk eene vergelijking de reeks van getallen-waarden, die, bij eene doorloopende

verandering van x, y achtereenvolgens moet aannemen, nadat de waarden van y, y', y'' ..... $y^{(n-1)}$ zijn aangewezen, die met eene bepaalde waarde van x, $x = x_0$, overeenkomen. Bij zulk eene differentiaal-vergelijking, die zich tot hiertoe aan elke toepassing eener integratie-methode onttrekt, kan echter somtijds door de rechtstreeksche discussie de loop der functie y, die zij ingewikkeld bepaalt, alsmede hare kenmerkende eigenschappen worden opgespoord. Uit eene discussie der vergelijking (Sturm, Liouv. T. I. 1836. p. 106)

$$d_x (X_1 y') + X_0 y = 0 , \quad \ldots\ldots\ldots \quad (128)$$

blijkt zelfs, dat het kan gebeuren, dat deze rechtstreeksche behandeling beter den aard en het wezen dier functie leert kennen dan de beschouwing van de algemeene integraal der vergelijking, onverschillig in welken vorm men deze ook verkregen heeft. Na Sturm hebben dan ook onderscheidene wiskundigen in dien geest gearbeid en getracht om uit de differentiaal-vergelijking zelve voor elke waarde der onafhankelijk veranderlijke, of wat hetzelfde is, voor alle punten der vlakte het karakter en den loop der kromme lijnen na te gaan, die door de vergelijking ingewikkeld worden bepaald [62]). Het ligt echter buiten mijn plan, mij hier met deze opvatting van de integratie eener differentiaal-vergelijking bezig te houden.

---

[62]) De voornaamste van de verhandelingen, die ik hier op het oog heb, is de discussie van de algemeene lineaire vergelijking van hoogere orde door Fuchs; Crelle, Bd. LXVI. S. 121 en Bd. LXVIII. S. 354.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

I.

De verdeeling der integratie-methoden van differentiaalvergelijkingen met twee veranderlijken naar den vorm der daardoor verkregen integraal is onlogisch.

II.

„Elke geïsoleerde primaire vergelijking, elke methode heeft haar nut, al leert zij ons slechts de oplossing van ééne vergelijking."

N. P. Kapteijn, Acad. proefschrift.

III.

De groote vorderingen, die men in den laatsten tijd in de wiskunde gemaakt heeft, zijn hoofdzakelijk toe te schrijven aan het gebruik van symbolische teekens. Men moet echter zeer voorzichtig zijn met het invoeren van symbolen, ten einde hun aantal niet noodeloos te vermeerderen.

IV.

Het conventioneele moet zich in de wiskunde enkel bepalen tot definities, niet tot stellingen.

V.

Sommige wijsgeeren roemen gedurig de wiskunde als type van wetenschap; zij benadeelen daardoor zich zelven want zij nemen daardoor veel van de kracht hunner uitspraken weg.

VI.

Het gebruik, dat men in de wiskunde maakt van bewijzen uit het ongerijmde, bewijst niet de onvolmaaktheid dier wetenschap, maar alleen de beperktheid van het menschelijk verstand.

VII.

Het recht van het gebruik der complexe grootheden moet à priori bewezen worden, niet door gelukkige toepassingen.

VIII.

De leer der evenredigheden moet uit de lagere school verbannen worden.

IX.

De vormleer mag op de lagere school niet behandeld worden als een „soort" van meetkunde, maar men moet haar beschouwen als een middel om het voorstellingsvermogen der leerlingen te oefenen, of om hen tot het onderwijs in het teekenen voor te bereiden.

X.

De toepassing van de leer der limieten moet bij de bewijzen in de lagere meetkunde vermeden worden.

XI.

„C'est une remarque, que nous pouvons faire dans toutes nos recherches mathématiques: ces quantités auxiliaires, ces calculs longs et difficiles où l'on se trouve entraîné, y sont presque toujours la preuve que notre esprit n'a point, dès le commencement, considéré les choses en elles-mêmes et d'une vue assez directe, puisqu'il nous faut tant d'artifices et de détours pour y arriver; tandis que tout s'abrège et ce simplifie sitôt qu'on se place au vrai point de vue."

Poinsot, Statique.

XII.

Ten onrechte meenen sommige wiskundigen zich jegens de analyse verdienstelijk te maken, door daaruit met veel omslachtigheid waarheden af te leiden, die reeds door eenvoudiger methoden zijn aangetoond.

XIII.

Het is in 't algemeen wenschelijk, dat aan de hoogere burgerscholen met vijfjarigen cursus twee verschillende cursussen in de natuurkunde gegeven worden.

XIV.

Het springen van stoomketels heeft meestal zijnen grond in het vloeibaar blijven van het water boven het kookpunt.

XV.

Het zoude nadeelig werken op de ontwikkeling der natuurwetenschappen, wanneer men zich steeds wilde houden aan de uitspraak van von Humboldt: „Es ist besser Erscheinungen unerklärt zu lassen, besser zu gestehen dass sie zu gross sind um ihre Erklärung zu wagen, als von

Wirkungen auszugehen die jenseits unserer empirischen Erkenntniss liegen."

XVI.

De methode ter bepaling van de persoonlijke fouten van den waarnemer, zooals die door wijlen den Hoogleeraar F. Kaiser gevonden is, mag voor de sterrekunde even belangrijk heeten als de uitvinding der kijkers.

XVII.

Het is zeer wenschelijk, dat van regeeringswege personen worden aangesteld, die zich met het scheikundig onderzoek der levensmiddelen bezighouden.

XVIII.

Eene scherpe verdeeling der organische wezens in planten en dieren ligt niet in de natuur.

XIX.

Verkeerdelijk wordt aan vele middelbare scholen alleen in de laagste klassen onderwijs gegeven in de natuurhistorische vakken.

XX.

Bij de tegenwoordige inrichting van het middelbaar onderwijs is het niet verkieslijk, dat de directeur eener hoogere burgerschool met vijfjarigen cursus een literator zij.

XXI.

Door het populariseeren der wetenschap wordt niet alleen het volk, maar ook de wetenschap zelve gebaat.

E R R A T A.



Bladz.	8	regel	10—12	van	boven	δ	*lees:*	∂
»	39	»	5	»	»	*k*	»	*k* de
»	39	»	13	»	»	$\int_{(n)}$	»	$\int^{(n)}$
»	41	»	6	»	»	(21ª)	»	(22ª)
»	41	»	9	»	onder	$y^{(n-1)}$	»	$y^{(n-2)}$
»	44	»	13	»	boven	§ 160	»	§ 162
»	46	»	2	»	onder	A	»	2A
»	47	»	8	»	»	*u*	»	*x*
»	48	»	0	»	boven	§ 40	»	§ 41
»	55	»	8	»	onder	§ 90	»	§ 89
»	58	»	1	»	»	§ 46	»	§ 30 en § 46
»	59	»	1	»	»	IV	»	VI
»	67	»	3	»	»	$e \mathrm{X} d_x$	»	$e \mathrm{X}$ —
»	71	»	9	»	boven	*m*	»	*m* der
»	71	»	11	»	onder	verkrijgt	»	verkrijgt,
»	79	»	7	»	boven	ρ'_k	»	β_k
»	79	»	4	»	onder	y (=	»	y = (
»	86	»	7	»	»	(geldend)	»	geldend
»	87	»	1	»	»	Noot 43	»	Noot 41
»	98	»	2	»	»	(49)	»	(49^e)
»	117	»	13	»	»	b	»	d

ERRATA.

Bladz.	121	regel	12	van	boven	e_u	*lees:*	e^u
»	129	»	1	»	»	gument	»	argument
»	131	»	9	»	onder	42	»	40
»	161	»	10	»	boven	x	»	x^{α}
»	174	»	8	»	»	m^{u-2}	»	m^{n-2}
»	174	»	4	»	onder	$(m_1$	»	(m_1)

Bl. 192 r. 1 en 2 v. o. *lees:* $+ \ldots + f(x)^k \sum_1^k C_k \delta_k^k + f(x)^{k+1} \varphi(x) \sum_1^k C_k \delta_k^{k+1} \Big]$,

Bladz.	215	»	2	van	onder	94	»	95
»	216	»	3	»	boven	[	»	]
»	234	»	7	»	onder	5n	»	5u